

## CHAPITRE 1

### Fonctions rationnelles fct-ncr.1 [1 - B. Ischi 25-26]

DÉFINITION 0.1. fct-ncr.2 Une fonction rationnelle est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

où  $p$  et  $q$  sont des polynômes.

fct-ncr.3 Le domaine de définition d'une fonction rationnelle  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  est donné par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \text{Ker}(q)$$

c'est-à-dire tous les nombres sauf les racines du dénominateur  $q(x)$ .

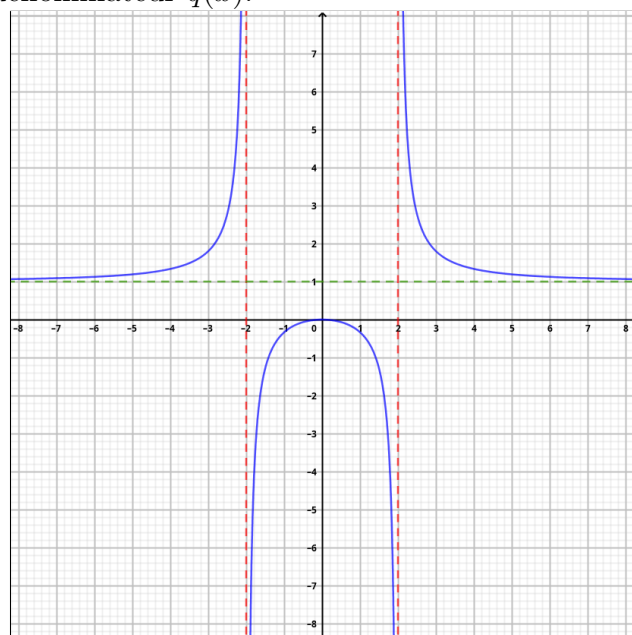
EXEMPLE 0.2. fct-ncr.4 Le graphique de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

est représenté sur la figure ci-contre. Le domaine de  $f$  est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

On remarque que quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ , la courbe se "rapproche" de la droite horizontale  $y = 1$ . Cette droite est appelée **asymptote horizontale**. Par ailleurs, les droites verticales  $x = 2$  et  $x = -2$  sont appelées **asymptotes verticales**.



### 1. Fonctions homographiques fct-ncr.5

DÉFINITION 1.1. fct-ncr.6 Une fonction homographique est une fonction rationnelle dont le dénominateur est un polynôme de degré 1 et le numérateur est un polynôme de degré  $\leq 1$ :

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ avec } c \neq 0$$

fct-ncr.7 Le domaine de définition de la fonction homographique

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

Son graphe est une hyperbole dont l'asymptote verticale est la droite

$$x = -\frac{d}{c}$$

et dont l'asymptote horizontale est la droite

$$y = \frac{a}{c}$$

**fct-ncr.8** Rappelons qu'une hyperbole est l'ensemble des points du plan

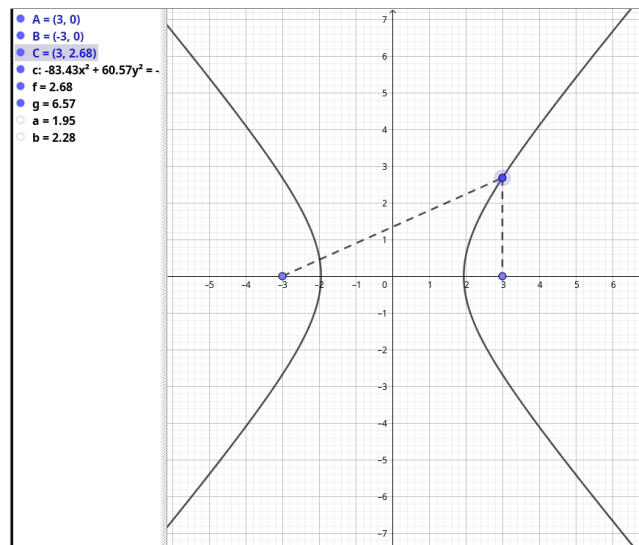
$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

On peut tracer des hyperboles avec *GeoGebra*. Un exemple se trouve sur la figure ci-contre:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } F_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



**fct-ncr.9** Soit

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ avec } a, b, c > 0 \text{ et } d < 0$$

On peut montrer que le graphe de  $f$  est une hyperbole dont les foyers sont

$$F_1 = \begin{pmatrix} g_1 + A \\ g_2 + A \end{pmatrix} \text{ et } F_2 = \begin{pmatrix} g_1 - A \\ g_2 - A \end{pmatrix} \text{ où } g_1 = -\frac{d}{c}, g_2 = \frac{a}{c} \text{ et } A = \frac{\sqrt{2(bc - ad)}}{c}$$

EXEMPLE 1.2. [fct-ncr.10](#) Sur le graphique ci-contre se trouve le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

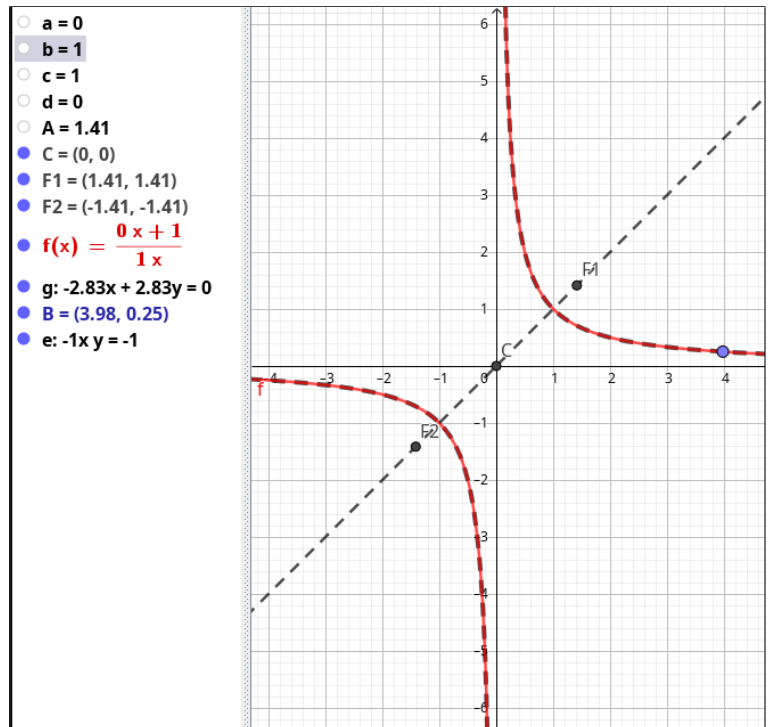
c'est-à-dire

$$a = 0, b = 1, c = 1 \text{ et } d = 0$$

ainsi que l'hyperbole dont les foyers sont

$$F_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } F_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et un point se trouve sur le graphe de  $f$ . Les asymptotes de  $f$  sont  $x = 0$  et  $y = 0$ .



EXEMPLE 1.3. [fct-ncr.11](#) Sur le graphique ci-contre se trouve le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

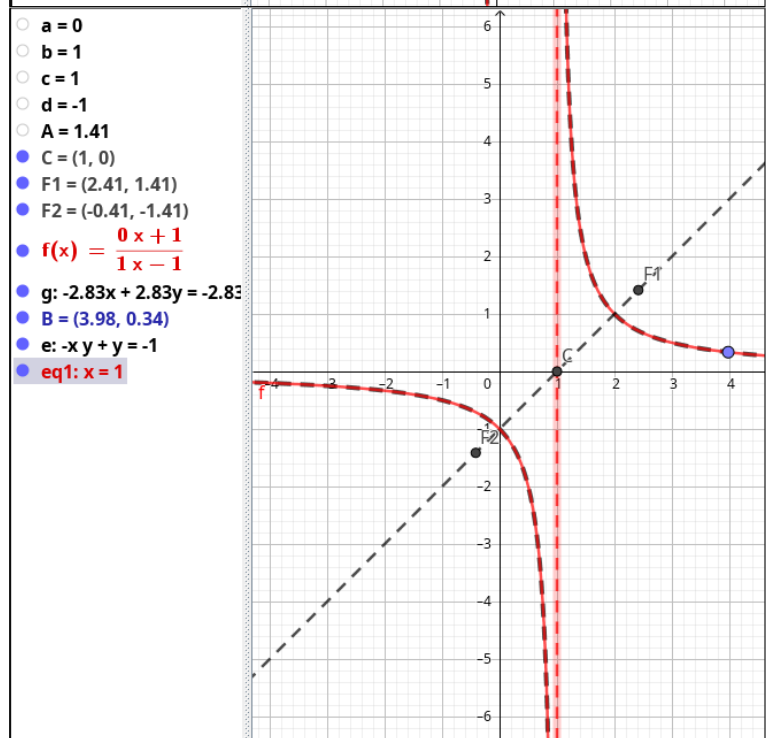
c'est-à-dire

$$a = 0, b = 1, c = 1 \text{ et } d = -1$$

ainsi que l'hyperbole dont les foyers sont

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } F_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et un point se trouve sur le graphe de  $f$ . Les asymptotes de  $f$  sont  $x = 1$  et  $y = 0$ .



EXEMPLE 1.4. **fct-ncr.12** Sur le graphique ci-contre se trouve le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 5}$$

c'est-à-dire

$$a = 3, b = 1, c = 2 \text{ et } d = -5$$

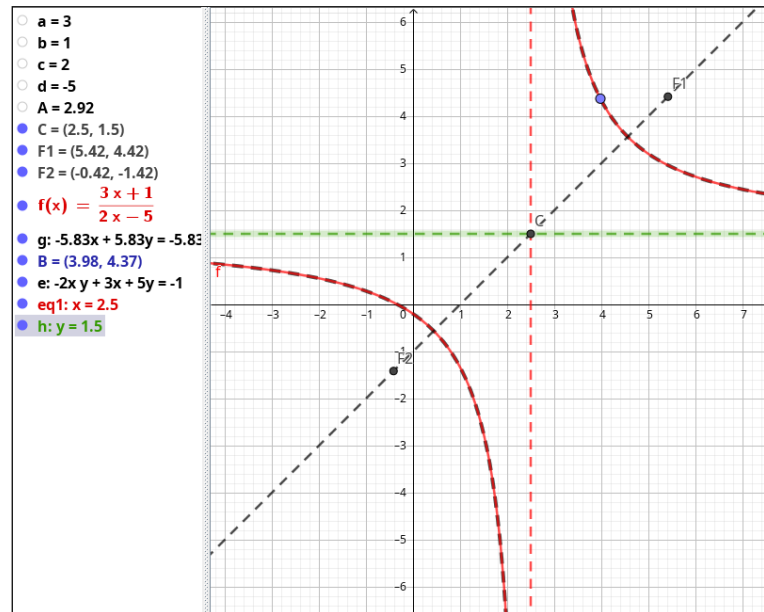
ainsi que l'hyperbole dont les foyers sont

$$F_1 = \left( 2.5 + \frac{\sqrt{34}}{2}, 1.5 + \frac{\sqrt{34}}{2} \right)$$

et

$$F_2 = \left( 2.5 - \frac{\sqrt{34}}{2}, 1.5 - \frac{\sqrt{34}}{2} \right)$$

et un point se trouve sur le graphe de  $f$ . Les asymptotes de  $f$  sont  $x = 2.5$  et  $y = 1.5$ .



## 2. Etudes de fonctions rationnelles **fct-ncr.13**

**fct-ncr.14** Soit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

une fonction rationnelle. Nous allons présenter quelques outils permettant d'esquisser le graphe de  $f$ . D'autres outils seront présentés en analyse au chapitre des dérivées.

### 2.1. Asymptotes obliques. **fct-ncr.15**

**fct-ncr.16** Nous allons étudier l'allure du graphe de  $f$  pour  $x$  "grand" et  $-x$  "grand", c'est-à-dire l'allure du graphe de  $f$  "très" à droite de l'axe des ordonnées et "très" à gauche de l'axe des ordonnées.

EXEMPLE 2.1. **fct-ncr.17** Soit

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{5x^2 - 3x - 1}$$

Sur la figure 1, nous avons représenté le graphique de  $f$  et de la droite

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{9}{25}$$

à différentes échelles. Nous constatons que le graphe de  $f$  et celui de la droite se superposent "très bien" pour  $x > 20$  et pour  $x < -20$ .

Dans cet exemple, le degré de  $p(x)$  vaut 3 et celui de  $q(x)$  vaut 2. Pour des  $x$  "très grands", on a

$$f(x) \approx \frac{2x^3}{5x^2} = \frac{2}{5}x$$

car c'est le terme avec la plus grande puissance de  $x$  qui domine au numérateur (*i.e.*  $2x^3$ ) et c'est le terme avec la plus grande puissance de  $x$  qui domine au dénominateur (*i.e.*  $5x^2$ ). La **division euclidienne** donne

$$2x^3 - 3x^2 + 7x - 1 = (5x^2 - 3x - 1) \left( \frac{2}{5}x - \frac{9}{25} \right) + \frac{158}{25}x - \frac{34}{25}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{5x^2 - 3x - 1} = \frac{2}{5}x - \frac{9}{25} + \frac{\frac{158}{25}x - \frac{34}{25}}{5x^2 - 3x - 1}$$

Or, pour

$$x \text{ "très grand"} \quad \frac{\frac{158}{25}x - \frac{34}{25}}{5x^2 - 3x - 1} \approx \frac{\frac{158}{25}x}{5x^2} = \frac{158}{125x} \approx 0$$

La droite

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{9}{25}$$

est appelée l'**asymptote oblique** du graphe de  $f$ .

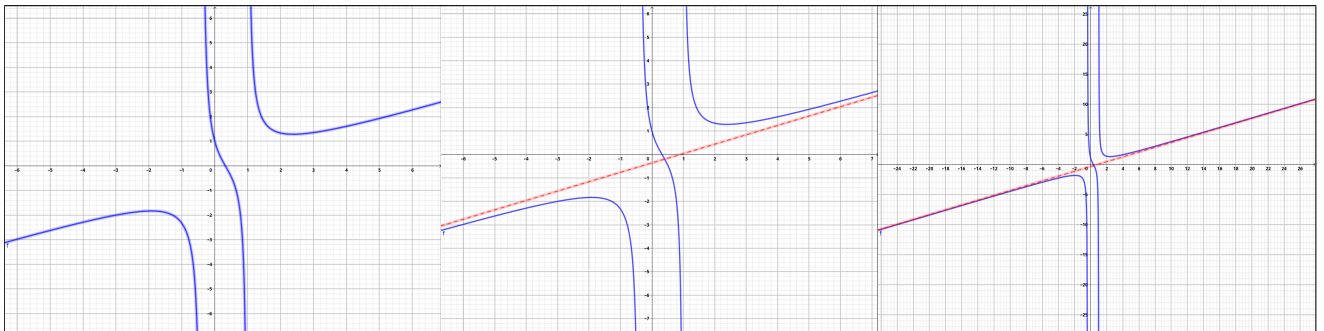


FIGURE 1.  $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{5x^2 - 3x - 1}$  en bleu et la droite  $y = \frac{2}{5}x - \frac{9}{25}$  en rouge

EXEMPLE 2.2. **fct-ncr.18** Soit

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 7}{2x^2 - 3}$$

Sur la figure 2, nous avons représenté le graphique de  $f$  et de la droite horizontale

$$y = \frac{5}{2}$$

à différentes échelles. Nous constatons que le graphe de  $f$  et celui de la droite se superposent "très bien" pour  $x > 25$  et pour  $x < -25$ .

Dans cet exemple, le degré de  $p(x)$  vaut 2 et celui de  $q(x)$  vaut 2. Le numérateur et le dénominateur ont le même degré. Pour des  $x$  "très grands", on a

$$f(x) \approx \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2}$$

car c'est le terme avec la plus grande puissance de  $x$  qui domine au numérateur (*i.e.*  $5x^2$ ) et c'est le terme avec la plus grande puissance de  $x$  qui domine au dénominateur (*i.e.*  $2x^2$ ). La **division euclidienne** donne

$$5x^2 - 3x + 7 = (2x^2 - 3) \left( \frac{5}{2} \right) - 3x + \frac{29}{2}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 7}{2x^2 - 3} = \frac{5}{2} + \frac{-3x - \frac{29}{2}}{2x^2 - 3}$$

et

$$\text{pour } x \text{ "grand"} \quad \frac{-3x - \frac{29}{2}}{2x^2 - 3} \approx \frac{-3x}{2x^2} = \frac{-3}{2x} \approx 0$$

La droite horizontale  $y = \frac{5}{2}$  est appelée l'**asymptote horizontale** de  $f$ .

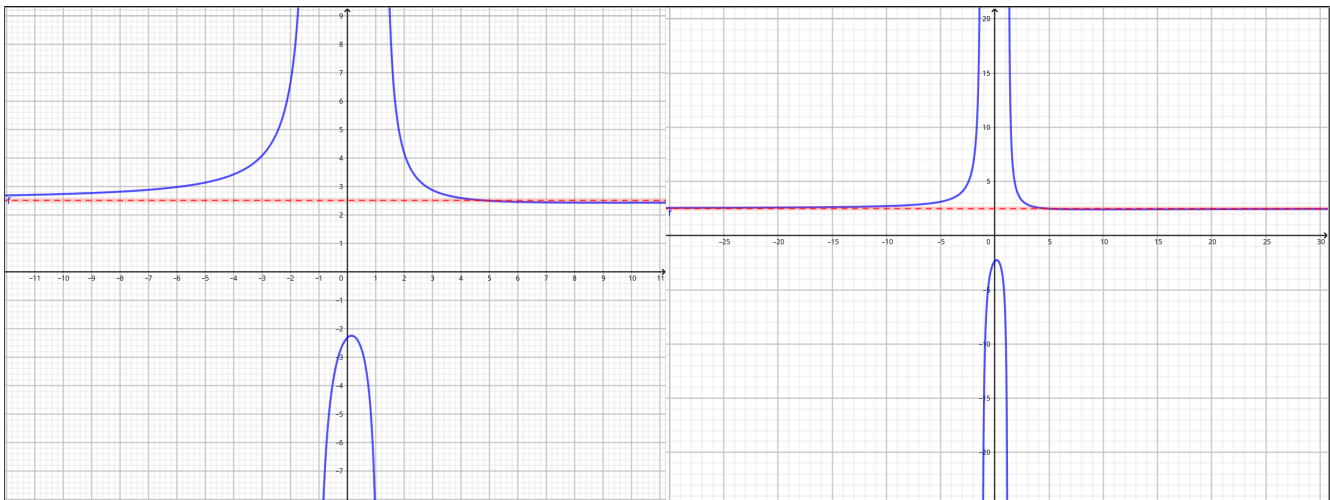


FIGURE 2.  $f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 7}{2x^2 - 3}$  en bleu et la droite horizontale  $y = \frac{5}{2}$  en rouge

EXEMPLE 2.3. **ftc-ncr.19** Soit

$$f(x) = \frac{5x + 7}{2x^2 - 3}$$

Sur la figure 3, nous avons représenté le graphique de  $f$  et de la droite horizontale

$$y = 0$$

à différentes échelles. Nous constatons que le graphe de  $f$  et celui de la droite se superposent "très bien" pour  $x > 30$  et pour  $x < -30$ .

Dans cet exemple, le degré de  $p(x)$  vaut 1 et celui de  $q(x)$  vaut 2. Pour des  $x$  "très grands", on a

$$f(x) \approx \frac{5x}{2x^2} = \frac{5}{2x} \approx 0$$

car c'est le terme avec la plus grande puissance de  $x$  qui domine au numérateur (*i.e.*  $5x$ ) et c'est le terme avec la plus grande puissance de  $x$  qui domine au dénominateur (*i.e.*  $2x^2$ ). La droite horizontale  $y = 0$  est appelée l'**asymptote horizontale** de  $f$ .

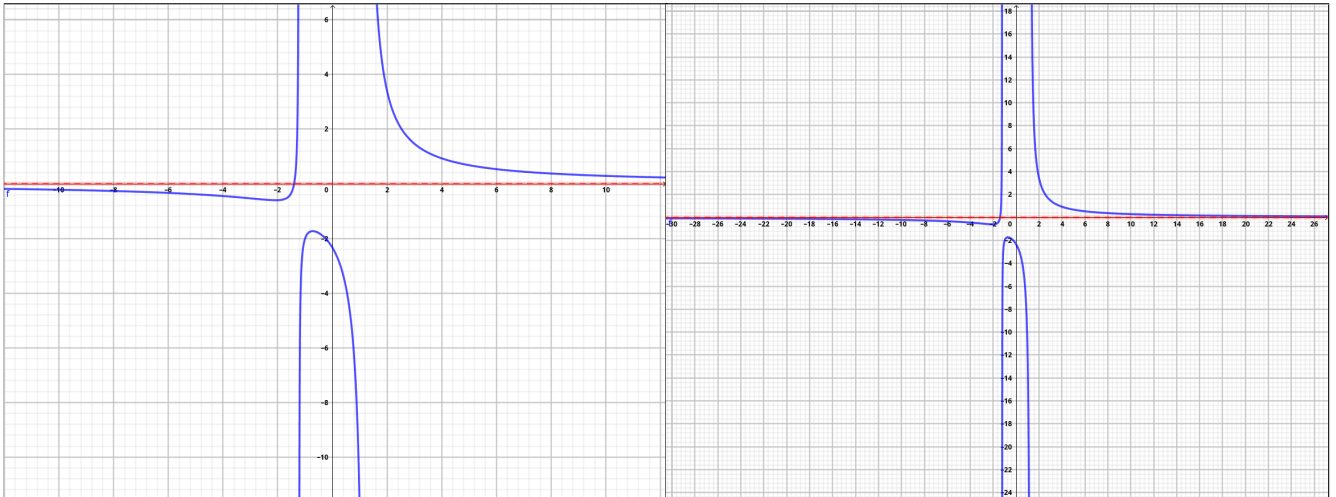


FIGURE 3.  $f(x) = \frac{5x+7}{2x^2-3}$  en bleu et la droite horizontale  $y = 0$  en rouge

**fct-ncr.20** Soit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

En résumé:

- Si  $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$ : le graphe de  $f$  admet une asymptote horizontale  $y = 0$ .
- Si  $\deg(p(x)) = \deg(q(x))$ : le graphe de  $f$  admet une asymptote horizontale  $y = \frac{a}{b}$  où  $a$  est le coefficient dominant de  $p(x)$  et  $b$  est le coefficient dominant de  $q(x)$ .
- Si  $\deg(p(x)) = \deg(q(x)) + 1$ : le graphe de  $f$  admet une asymptote oblique  $y = ax + b$  qui peut être déterminée par la division euclidienne de  $p(x)$  par  $q(x)$ .

## 2.2. Asymptotes verticales. **fct-ncr.21**

EXEMPLE 2.4. **fct-ncr.22** Soit

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

Le domaine de  $f$  est l'ensemble des nombres réels sauf les racines du dénominateur:

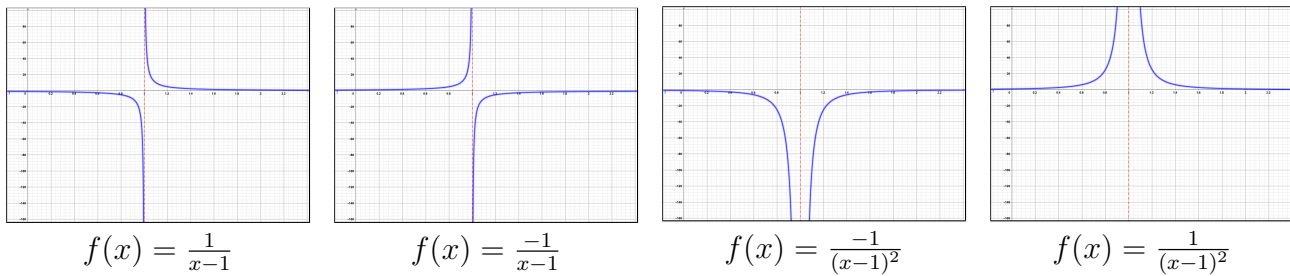
$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \Rightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

Sur la figure 4, on a tracé, à différentes échelles, le graphique de  $f$  ainsi que deux les droites verticales

$$x = 1 \text{ et } x = 2$$

On constate que quand  $x$  est “proche” de 1 ou de 2, le graphe de  $f$  s’approche des droites verticales. Quand on “s’éloigne” du graphique, ces deux droites restent visibles. Ces droites sont appelées des **asymptotes verticales** de  $f$ .

EXEMPLE 2.5. **fct-ncr.23** Le graphe d’une fonction rationnelle “autour” d’une asymptote verticale peut avoir les formes suivantes:



EXEMPLE 2.6. **fcn-ncr.24** Soit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

une fonction rationnelle et  $x_0$  une racine de  $q(x)$  (*i.e.*  $q(x_0) = 0$ ). Est-ce que le graphe de  $f$  a une asymptote verticale en  $x_0$  ? Réponse: pas nécessairement ! Par exemple, le graphe de

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

est tracé sur la figure 5. Le graphe de  $f$  admet clairement une asymptote verticale en  $x = 1$ , mais pas en  $x = 2$ . On a même l'impression que  $f$  est définie en  $x = 2$ , bien que

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

Que se passe-t-il ? Remarquons que

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x - 2}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{1}{x - 1} \text{ pour } x \neq 2$$

Le logiciel *GeoGebra* relie les points du graphes. L'image de 2 n'existe pas. En revanche les images de 1.999999 et 2.000001 existent et sont reliées par un trait. C'est pourquoi, en regardant le graphique, on a l'impression que l'image de 2 est définie. Cet exemple est bien entendu artificiel.

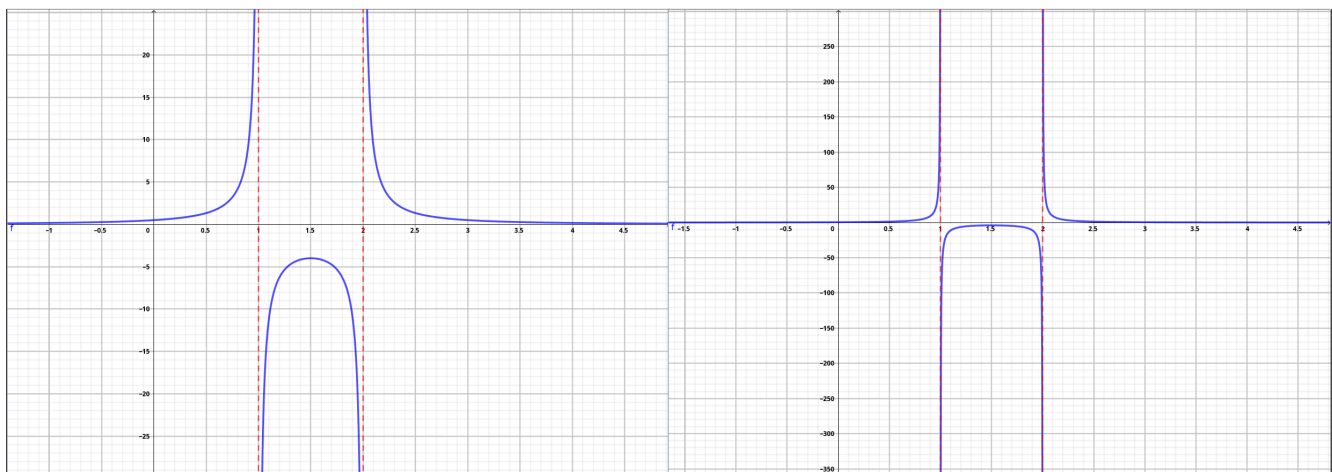


FIGURE 4. La fonction  $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$  en bleu et les droites verticales  $x = 1$  et  $x = 2$  en rouge.

Il est en effet alambiqué d'écrire

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2} \text{ au lieu de } f(x) = \frac{1}{x-1}$$

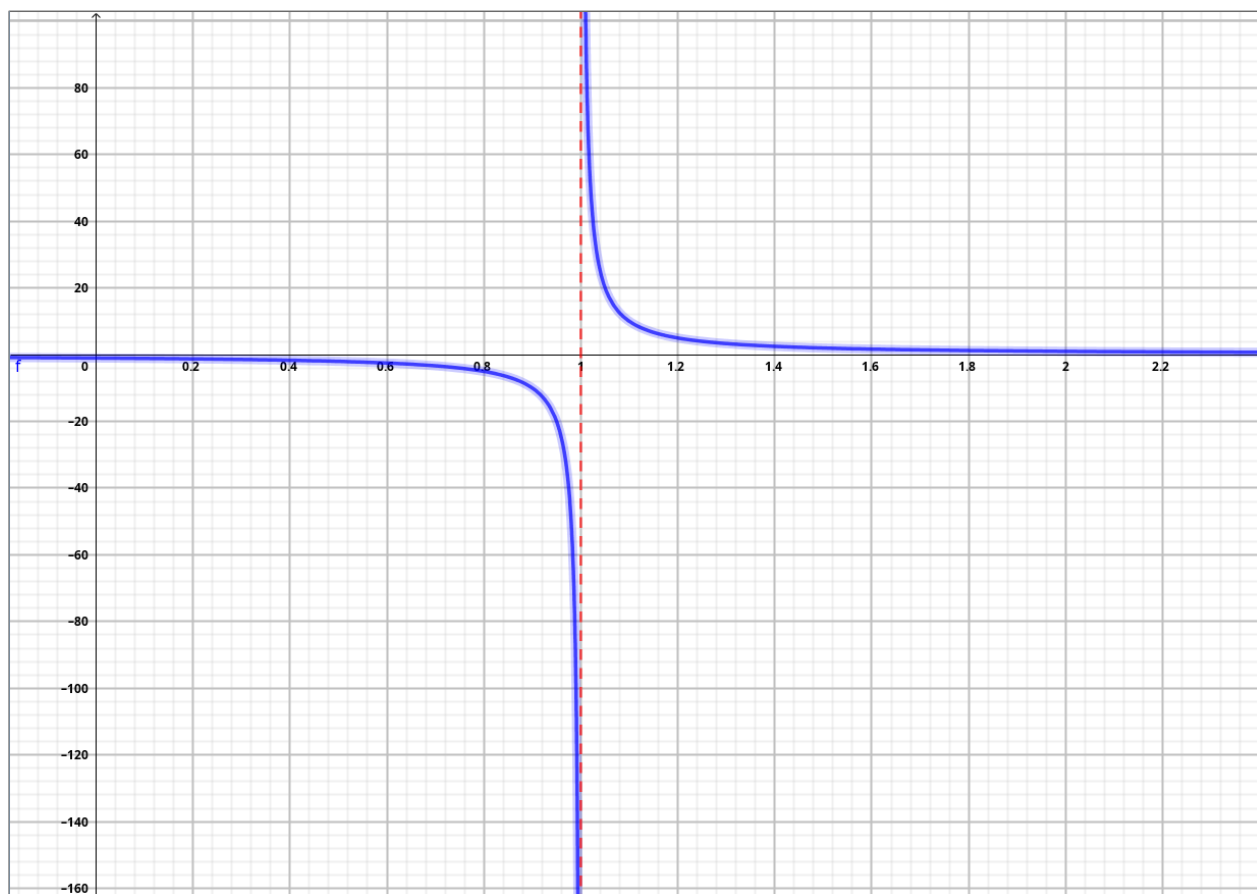


FIGURE 5. La fonction  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$  en bleu et la droites verticales  $x = 1$  en rouge.

### 2.3. Tableau des signes d'une fonction rationnelle. [fct-ncr.25](#)

[fct-ncr.26](#) Soit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

une fonction rationnelle. Le tableau des signes de  $f$  consiste en la donnée des intervalles sur lesquels les images de  $f$  sont positives et des intervalles sur lesquels les images de  $f$  sont négatives.

REMARQUE 2.7. **fct-ncr.27** Soit  $p$  un polynôme. On peut tracer le graphique de la fonction  $p(x)$  sans lever le crayon. Par conséquent, entre deux zéros de  $p$ , les images ne changent pas de signe. Par exemple, considérons le polynôme

$$p(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

Ses zéros sont

$$\text{Ker}(p) = \{-1; 0; 1\}$$

Le tableau des signes de  $p$  est donné par

$x$		-1		0		1	
$p(x)$	-	0	+	0	-	0	+

De même, le signe des images d'une fonction rationnelle peut changer seulement au passage d'une asymptote verticale ou de zéros du numérateur.

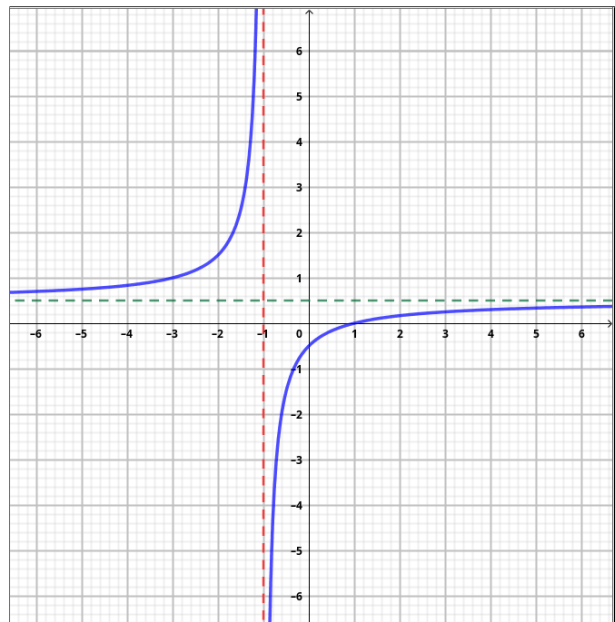
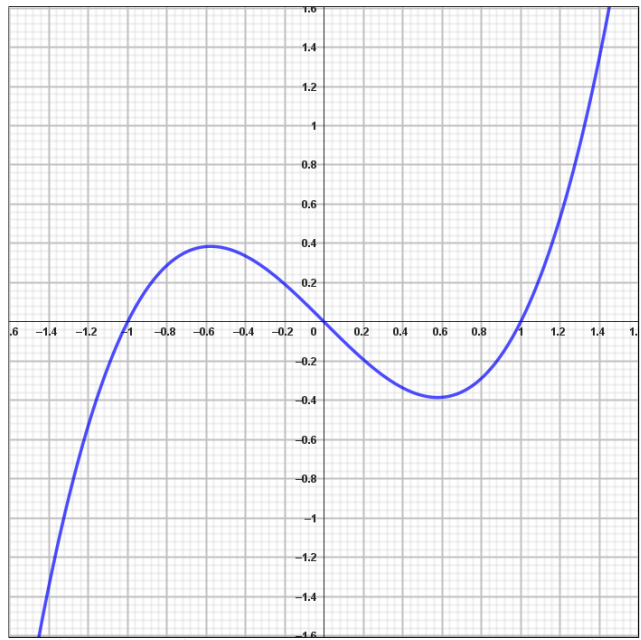
EXEMPLE 2.8. **fct-ncr.28** Soit

$$f(x) = \frac{x - 1}{2x + 2}$$

On détermine les signes des images de  $f$  en déterminant le tableau des signes du numérateur (*i.e.*  $p(x)$ ) et le tableau des signes du dénominateur (*i.e.*  $q(x)$ ):

$x$		-1		1	
$x - 1$	-	-	-	0	+
$2x + 2$	-	0	+	+	+
$f(x)$	+	$\emptyset$	-	0	+

Pour esquisser le graphe de  $f$ , on place les asymptotes, le ou les zéros de  $f$  et l'ordonnée à l'origine. Le tableau des signes de  $f$  permet de placer correctement le graphe de  $f$  par rapport à l'axe des abscisses.



EXEMPLE 2.9. **fct-ncr.29** Soit

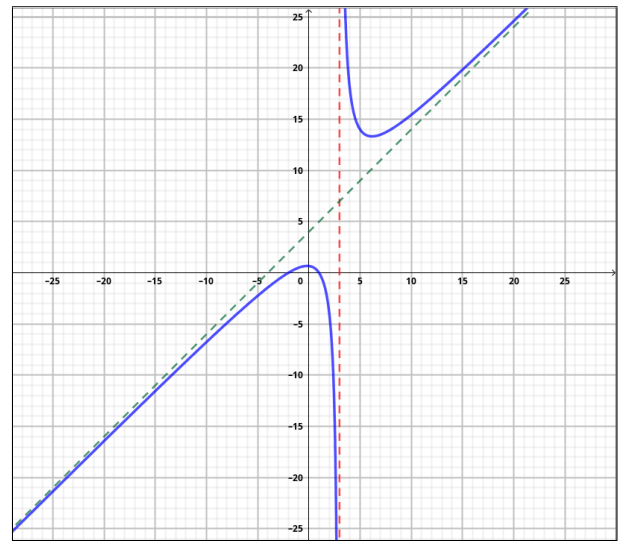
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3}$$

On détermine les signes des images de  $f$  en déterminant le tableau des signes du numérateur (*i.e.*  $p(x)$ ) et le tableau des signes du dénominateur (*i.e.*  $q(x)$ ). Remarquons que

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$x$		-2		1		3	
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	$\emptyset$	+

Pour esquisser le graphe de  $f$ , on place les asymptotes, le ou les zéros de  $f$  et l'ordonnée à l'origine. Le tableau des signes de  $f$  permet de placer correctement le graphe de  $f$  par rapport à l'axe des abscisses.



EXEMPLE 2.10. **fct-ncr.30** Soit

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x}$$

On détermine les signes des images de  $f$  en déterminant le tableau des signes du numérateur (*i.e.*  $p(x)$ ) et le tableau des signes du dénominateur (*i.e.*  $q(x)$ ). Remarquons que

$$x^2 - 2x = x(x - 2)$$

$x$		-1		0		2	
$x^3 + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 2x$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Pour esquisser le graphe de  $f$ , on place les asymptotes, le ou les zéros de  $f$  et l'ordonnée à l'origine. Le tableau des signes de  $f$  permet de placer correctement le graphe de  $f$  par rapport à l'axe des abscisses.

