CHAPITRE 1

Méthodes numériques an-ncmn.1 [1 - B. Ischi 07-08]

1. Equations différentielles ordinaires an-ncmn.2

1.1. But. an-ncmn.3

On veut calculer une approximation de la solution de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \qquad \text{avec} \qquad y(x_0) = y_0$$

sur l'intervalle $[x_0, x_f]$ (où $x_f > x_0$).

1.2. Méthode d'Euler (1768). an-ncmn.4

On subdivise l'intervalle $[x_0, x_f]$ en N sous-intervalles de même longueur, où N est un nombre entier. On définit

$$h = \frac{x_f - x_0}{N} \qquad \text{et} \qquad x_n = x_0 + n \cdot h$$

On note y_n l'approximation de la solution pour $x = x_n$, donc $y_n \approx y(x_n)$. Alors, la méthode d'Euler est donnée par

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

an-ncmn.5 Pour $n = 0$, la méthode d'Euler donne

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

On constate qu'elle est obtenue en remplaçant y par sa tangente au point (x_0, y_0). En effet, l'équation de la droite tangente au graphe de y au point (x_0, y_0) est donnée par

$$g(x) = y_0 + y'(x_0) \cdot (x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \qquad g(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h$$

Remarque 1.1. an-ncmn.6 En intégrant les deux côtés de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y)$$

on obtient

$$\int_{x_0}^{x_1} y'(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\, dx$$

c'est-à-dire, par le théorème fondamental du calcul différentiel

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\, dx$$

d'où il suit

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\, dx$$

La méthode d'Euler s'obtient donc en faisant l'approximation

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\,dx \approx f(x_0, y(x_0)) \cdot (x_1 - x_0) = f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

1.3. Méthode de Runge (1895). an-ncmn.7

La méthode de Runge consiste à calculer l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\,dx$ par la méthode du point milieu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\,dx \approx h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y(x_0 + \frac{h}{2}))$$

et à calculer $y(x_0 + \frac{h}{2})$ par la méthode d'Euler. On obtient

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0))$$

1.4. Méthodes de Runge-Kutta. an-ncmn.8 Pour simplifier les notations, on définit une méthode en donnant une formule seulement pour y_1 au lieu de y_n. Une généralisation naturelle des méthodes d'Euler et de Runge conduit à la définition suivante.

DÉFINITION 1.2 (Kutta 1901). Une méthode de Runge-Kutta à s étages est donnée par

$$y_1 = y_0 + h \cdot (b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \cdots + b_s \cdot k_s)$$

où

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0)\\
k_2 &= f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1)\\
k_3 &= f(x_0 + c_3 h, y_0 + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2))\\
&\vdots\\
k_s &= f(x_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \cdots + a_{s\,s-1} k_{s-1}))
\end{aligned}$$

et c_i, a_{ij} et b_j sont des nombres donnés.

REMARQUE 1.3. an-ncmn.9 On présente généralement les coefficients d'une méthode de Runge-Kutta sous la forme d'un tableau organisé comme suit:

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}$$

EXEMPLE 1.4. an-ncmn.10 Les coefficients de la méthode d'Euler sont donnés par

$$\begin{array}{c|c}
0 & \\
\hline
 & 1
\end{array}$$

EXEMPLE 1.5. an-ncmn.11 Les coefficients de la méthode de Runge sont donnés par

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

1.5. Ordre d'une méthode de Runge-Kutta. an-ncmn.12

DÉFINITION 1.6. Une méthode de Runge-Kutta a l'ordre p si pour tout f ([1]) il existe un nombre C tel que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{y_1 - y(x_0+h)}{h^{p+1}}\right) = C$$

où y désigne la solution de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

EXEMPLE 1.7. an-ncmn.13 Soit y la solution de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Si f est suffisamment dérivable, alors y est deux fois dérivable et sa deuxième dérivée est continue. Ainsi, par le théorème fondamental du calcul différentiel, la méthode d'intégration par parties et le théorème de la moyenne, nous savons qu'il existe un nombre $\xi \in [x_0, x_1]$ tel que (rappelons que $x_1 - x_0 = h$)

$$\begin{aligned} y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} y'(x)\,dx = y_0 - (x_1 - x)y'(x)\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}(x_1-x)y''(x)\,dx \\ = y_0 + (x_1-x_0)y'(x_0) - \frac{(x_1-x)^2}{2!}\Big|_{x_0}^{x_1} y''(\xi) = y_0 + h\cdot y'(x_0) + y''(\xi)\frac{(x_1-x_0)^2}{2} \\ = y_0 + h\cdot f(x_0,y_0) + y''(\xi)\frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{y(x_1)-y_1}{h^2} = \frac{y''(\xi)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{h\to 0}\frac{y(x_1)-y_1}{h^2} = \frac{y''(0)}{2}$$

La méthode d'Euler est donc d'ordre 1.

THÉORÈME 1.8. an-ncmn.14 *Une méthode de Runge-Kutta à s étages avec $s \le 4$ et $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ pour tout $2 \le j \le s$ a l'ordre*

- *1 si*

(1) $$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$

- *2 si la condition (1) est satisfaite et si*

(2) $$b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 = \frac{1}{2}$$

- *3 si les conditions (1) et (2) sont satisfaites et si*

(3) $$b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 = \frac{1}{3}$$

(4) $$b_3a_{32}c_2 + b_4\left(a_{42}c_2 + a_{43}c_3\right) = \frac{1}{6}$$

[1] $p+1$ fois dérivable

- *4 si les conditions (1) à (4) sont satisfaites et si*

$$b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 = \frac{1}{4} \tag{5}$$

$$b_3c_3a_{32}c_2 + b_4c_4\left(a_{42}c_2 + a_{43}c_3\right) = \frac{1}{8} \tag{6}$$

$$b_3a_{32}c_2^2 + b_4\left(a_{42}c_2^2 + a_{43}c_3^2\right) = \frac{1}{12} \tag{7}$$

$$b_4a_{43}a_{32}c_2 = \frac{1}{24} \tag{8}$$

Exemple 1.9. an-ncmn.15 Pour la méthode d'Euler,

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Elle est donc d'ordre 1.

Exemple 1.10. an-ncmn.16 Pour la méthode de Runge,

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Elle donc d'ordre 2.

Exemple 1.11. an-ncmn.17 La méthode de Heun est donnée par

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

an-ncmn.18 Il suit que

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= \frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4} + 0 = 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 &= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{2} \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 &= 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0 = \frac{1}{3} \\ b_3a_{32}c_2 + b_4\left(a_{42}c_2 + a_{43}c_3\right) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

La méthode de Heun est donc d'ordre 3.

Exemple 1.12. an-ncmn.19 La méthode de Runge-Kutta est donnée par

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

an-ncmn.20 Il suit que

$$\begin{aligned}
b_1+b_2+b_3+b_4 &= \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=1\\
b_2c_2+b_3c_3+b_4c_4 &= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{2}\\
b_2c_2^2+b_3c_3^2+b_4c_4^2 &= \frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot 1^2=\frac{1}{3}\\
b_3a_{32}c_2+b_4\left(a_{42}c_2+a_{43}c_3\right) &= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\\
b_2c_2^3+b_3c_3^3+b_4c_4^3 &= \frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{2}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{6}\cdot 1^3=\frac{1}{4}\\
b_3c_3a_{32}c_2+b_4c_4\left(a_{42}c_2+a_{43}c_3\right) &= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\left(0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\\
b_3a_{32}c_2^2+b_4\left(a_{42}c_2^2+a_{43}c_3^2\right) &= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{12}\\
b_4a_{43}a_{32}c_2 &= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}
\end{aligned}$$

La méthode de Runge-Kutta est donc d'ordre 4.

1.6. Erreur globale. an-ncmn.21

THÉORÈME 1.13. *Soit y la solution de l'équation différentielle $y'=f(x,y)$, avec la condition initiale $y(x_0)=y_0$, sur l'intervalle $[x_0,x_f]$ (avec $x_f>x_0$). Soit N un nombre entier, $h=\frac{x_f-x_0}{N}$ et y_n une approximation de la solution donnée par une méthode de Runge-Kutta d'ordre p. Alors, (si f est suffisamment dérivable) il existe une constante C telle que*

$$|y(x_f)-y_N|\leq C\cdot h^p$$

La différence $|y(x_f)-y_N|$ est appelée l'erreur globale.

CHAPITRE 2

Intégrales an-ncmn.22 [**1** - B. Ischi 23-24]

0.1. But. an-ncmn.23

an-ncmn.24 Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a;b]$. Le but de ce chapitre est de présenter des méthodes permettant de donner une "bonne" approximation de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

1. Division de l'intervalle an-ncmn.25

an-ncmn.26 Nous commençons par diviser l'intervalle $[a;b]$ en N intervalles de longueur $\delta = \frac{b-a}{N}$:

$$[a;b] = [x_1;x_2] \cup [x_2;x_3] \cup [x_3;x_4] \cdots \cup [x_N;x_{N+1}]$$

où

$$x_j = (a + (j-1) \cdot \delta \text{ et } \delta = \frac{b-a}{N}$$

Remarque 1.1. an-ncmn.27 Remarquons qu'il serait plus judicieux de diviser l'intervalle $[a;b]$ en intervalles plus longs là où f varie peu et en intervalles plus courts là où f varie beaucoup.

an-ncmn.28 On trouve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_N}^{x_{N+1}} f(x)\,dx$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$

En effectuant le changement de variable $x = x_j + s \cdot \delta$, on trouve

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x_j + s \cdot \delta)\delta\,ds$$

et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 g_j(s)\,ds \text{ où } g_j(s) = \delta \cdot f(x_j + s \cdot \delta)$$

an-ncmn.29 Nous devons donc trouver des méthodes pour donner une "bonne" approximation de l'intégrale

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx ??$$

où g est une fonction continue quelconque sur l'intervalle $[0;1]$.

2. Méthodes de Newtons-Cotes an-ncmn.30

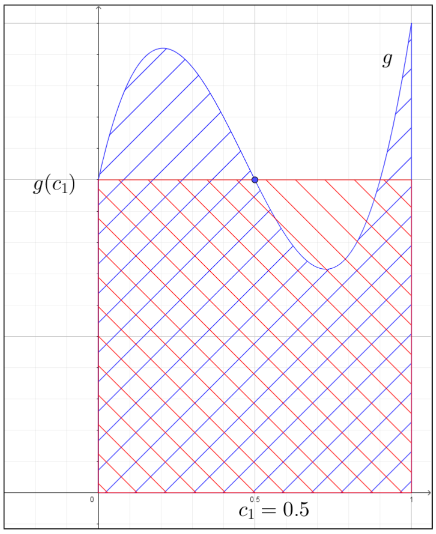
an-ncmn.31 Commençons par quelques exemples:

2.1. La méthode du point milieu. an-ncmn.32

an-ncmn.33 La méthode du point milieu consiste à faire l'approximation

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx g(0.5)$$

On approxime l'aire sous le graphe de g, hachurée en bleu (voir figure ci-contre), par l'aire, hachurée en rouge, sous le polynôme p de degré 0 passant par le point $(c_1, g(c_1))$, où $c_1 = \frac{1}{2}$ (*i.e.* l'aire du rectangle).



2.2. La méthode du trapèze. an-ncmn.34

an-ncmn.35 La méthode du trapèze consiste à faire l'approximation

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \int_0^1 p(x)\,dx$$

où p est le polynôme de degré 1 passant par les points

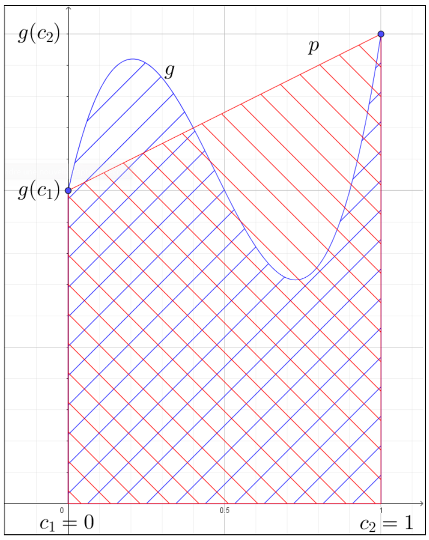
$$(c_1, g(c_1)) \text{ et } (c_2, g(c_2))$$

où

$$c_1 = 0 \text{ et } c_2 = 1$$

En mots, on approxime l'aire sous le graphe de g, hachurée en bleu (voir figure ci-contre), par l'aire, hachurée en rouge, sous le polynôme p. Par la formule de l'aire d'un trapèze, on trouve

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}g(1)$$



2.3. La méthode de Simpson. an-ncmn.36

an-ncmn.37 La méthode de Simpson consiste à faire l'approximation

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \int_0^1 p(x)\,dx$$

où p est le polynôme de degré 2 passant par les points

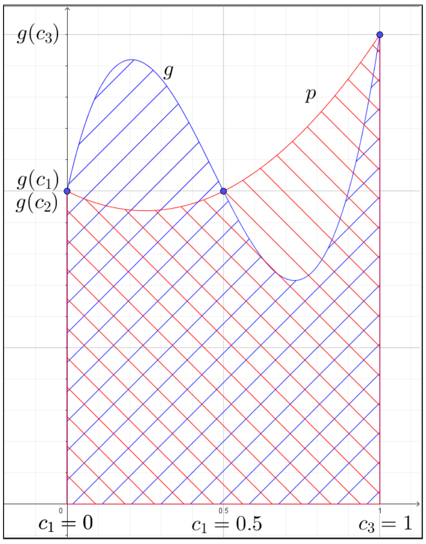
$$(c_1, g(c_1)),\ (c_2, g(c_2)) \text{ et } (c_3, g(c_3))$$

où

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{2} \text{ et } c_3 = 1$$

En mots, on approxime l'aire sous le graphe de g, hachurée en bleu (voir figure ci-contre), par l'aire, hachurée en rouge, sous le polynôme p. On peut montrer (voir exercices) que

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{1}{6}g(0) + \frac{4}{6}g(1/2) + \frac{1}{6}g(1)$$



2.4. Les méthodes de Newton, Boole, Weddle, ... an-ncmn.38

an-ncmn.39 Les autres méthodes de Newton-Cotes sont données par:

s	c_j	b_j	nom
1	$\frac{1}{2}$	1	point milieu
2	$0,\ 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	trapèze
3	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	Simpson
4	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	Newton
5	$0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	Boole
6	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$	$\frac{19}{288}, \frac{75}{288}, \frac{50}{288}, \frac{50}{288}, \frac{75}{288}, \frac{19}{288}$	
7	$0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$	$\frac{41}{840}, \frac{216}{840}, \frac{27}{840}, \frac{272}{840}, \frac{27}{840}, \frac{216}{840}, \frac{41}{840}$	Weddle

an-ncmn.40 Dans ce tableau, s désigne le nombre d'évaluations de la fonction g. Le nombre s est appelé le nombre d'étages de la méthode. Ces méthodes donnent

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx b_1 g(c_1) + b_2 g(c_2) + \cdots + b_s g(c_s) = \sum_{j=1}^{n} b_j g(c_j)$$

Remarque 2.1. an-ncmn.41 Les nombres c_j sont appelés les nœuds de la méthode et les nombres b_j les poids. Remarquons que les poids des méthodes de Newton-Cotes sont "symétriques":

$$b_j = b_{s-j+1}$$

an-ncmn.42 La méthode de Newton consiste à faire l'approximation

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \int_0^1 p(x)\,dx$$

où p est le polynôme de degré 3 passant par les points

$$(c_1, g(c_1)),\ (c_2, g(c_2)),\ (c_3, g(c_3)),\ (c_4, g(c_4))$$

an-ncmn.43 La méthode de Boole consiste à faire l'approximation

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \int_0^1 p(x)\,dx$$

où p est le polynôme de degré 4 passant par les points

$$(c_1, g(c_1)),\ (c_2, g(c_2)),\ (c_3, g(c_3)),\ (c_4, g(c_4)),\ (c_5, g(c_5))$$

an-ncmn.44 La méthode de Weddle consiste à faire l'approximation

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \int_0^1 p(x)\,dx$$

où p est le polynôme de degré 6 passant par les points

$$(c_1, g(c_1)),\ (c_2, g(c_2)),\ (c_3, g(c_3)),\ (c_4, g(c_4)),\ (c_5, g(c_5)),\ (c_6, g(c_6)),\ (c_7, g(c_7))$$

3. Ordre des formules de quadrature an-ncmn.45

an-ncmn.46 Soient s nombres, tous différents, dans l'intervalle $[0; 1]$:

$$0 \le c_1 < c_2 < \cdots < c_{s-1} < c_s \le 1$$

Rappelons que pour toute fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$, il existe un unique polynôme de degré $s - 1$

$$p(x) = a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

passant par les points

$$(c_1; g(c_1)),\ (c_2; g(c_2)),\ \cdots,\ (c_s; g(c_s))$$

c'est-à-dire, tel que

$$\begin{cases} c_1^{s-1}a_{s-1} & + \cdots & + c_1^2 a_2 & + c_1 a_1 + & a_0 & = g(c_1) \\ c_2^{s-1}a_{s-1} & + \cdots & + c_2^2 a_2 & + c_2 a_1 + & a_0 & = g(c_2) \\ \vdots & & & & & \\ c_s^{s-1}a_{s-1} & + \cdots & + c_s^2 a_2 & + c_s a_1 + & a_0 & = g(c_s) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{s-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_s & c_s^2 & \cdots & c_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(c_1) \\ g(c_2) \\ \vdots \\ g(c_s) \end{pmatrix}$$

Comme les nombres b_j sont tous différents, le déterminant de la matrice est non nul (voir déterminants de Vandermonde). Par conséquent, ce système admet une unique solution

$$a_0, \ a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_{s-1}$$

Ces nombres dépendent uniquement des nombres c_1, c_2, ..., c_s et des nombres $g(c_1)$, $g(c_2)$, ..., $g(c_s)$.

Par ailleurs,

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{a_{s-1}}{s} + \cdots + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0$$

et par ce qui précède, il existe des nombres b_1, b_2, ..., b_s tels que

$$\int_0^1 p(x)\,dx = b_1 g(c_1) + b_2 g(c_2) + \cdots + b_s g(c_s)$$

an-ncmn.47 Une formule de quadrature à s étages consiste en la donnée de $2s$ nombres:

(1) $0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_{s-1} < c_s \leq 1$

(2) b_1, b_2, ..., b_s tels que pour toute fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$,

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \sum_{j=1}^{s} b_j g(c_j)$$

où $p(x)$ est l'unique polynôme de degré $s - 1$ passant par les points

$$(c_1; g(c_1)), \cdots, (c_s; g(c_s))$$

On utilise la formule de quadrature pour calculer une intégrale en effectuant l'approximation

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{s} b_j g(c_j)$$

Définition 3.1. an-ncmn.48 Soit $(c_1, c_2, \cdots, c_s)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_s)$ une formule de quadrature à s étages. On dit qu'elle est d'ordre m si elle est exacte pour tout polynôme de degré $\leq m-1$, c'est-à-dire si

$$\int_0^1 q(x)\,dx = \sum_{j=1}^{s} b_j q(c_j) \ \forall \text{ polynôme } q \text{ de degré } \leq m-1$$

Remarque 3.2. an-ncmn.49 Une formule de quadrature à s étages est au moins d'ordre s. En effet, si q est un polynôme de degré $\leq s-1$, alors l'unique polynôme p de degré $s-1$ passant par les points

$$(c_1; q(c_1)), \cdots, (c_s, q(c_s))$$

et le polynôme q, et par conséquent

$$\sum_{j=1}^{s} b_j q(c_j) = \int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 q(x)\,dx$$

Considérons, à titre d'exemple, la méthode de Simpson. Si q est un polynôme de degré 2, alors l'unique polynôme p de degré 2 passant par les points

$$(0; q(0)),\ (0.5; q(0.5)),\ (1; q(1))$$

est le polynôme de q. Par conséquent, $p = q$ et

$$\frac{1}{6}q(0) + \frac{4}{6}q(0.5) + \frac{1}{6}q(1) = \int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 q(x)\,dx$$

ce qui montre que la méthode de Simpson, qui a 3 étages, est d'ordre 3.

3.1. Ordre des formules de Newton-Cotes. an-ncmn.50

Théorème 3.3. an-ncmn.51

(1) *La méthode du point milieu ($s = 1$) est d'ordre 2.*
(2) *La méthode de Simpson ($s = 3$) est d'ordre 4.*
(3) *La méthode de Boole ($s = 5$) est d'ordre 6.*
(4) *La méthode de Weddle ($s = 7$) est d'ordre 8.*

Démonstration. an-ncmn.52 Nous donnons une démonstration pour la méthode de Weddle. Les autres démonstrations sont similaires. La méthode de Weddle a 7 étages, elle donc au moins d'ordre 7, c'est-à-dire exacte pour tous les polynômes de degré ≤ 6. Pour montrer qu'elle est d'ordre 8, nous devons montrer qu'elle est exacte pour tous les polynômes de degré ≤ 7. Soit $q(x)$ un polynôme de degré 7:

$$q(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Soit

$$s(x) = a_7\left(x - \frac{1}{2}\right)^7 - q(x)$$

Alors,

$$q(x) = a_7\left(x - \frac{1}{2}\right)^7 - s(x) \text{ et } \deg(s(x)) \leq 6$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 q(x)\,dx = a_7 \underbrace{\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^7 dx}_{=0} - \int_0^1 s(x)$$

De plus, comme $s(x)$ est de degré ≤ 6 et comme la méthode de Weddle est à 7 étages,

$$\sum_{j=1}^{7} b_j s(c_j) = \int_0^1 s(x)\,dx$$

où

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{6},\ c_3 = \frac{2}{6},\ c_4 = \frac{3}{6},\ c_5 = \frac{4}{6},\ c_6 = \frac{5}{6} \text{ et } c_7 = 1$$

et les nombres b_j sont les poids de la méthode de Weddle. Par ailleurs,

$$\sum_{j=1}^{s} b_j q(c_j) = \sum_{j=1}^{s} b_j a_7 \left(c_j - \frac{1}{2}\right)^7 - \sum_{j=1}^{7} b_j s(c_j)$$

Pour conclure, remarquons que comme les poids des méthodes de Newton-Cotes sont “symétriques”: $b_j = b_{s-j+1}$, il suit que (rappelons que $b_1 = b_7$, $b_2 = b_6$ et $b_3 = b_5$)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{s} b_j a_7 \left(c_j - \frac{1}{2}\right)^7 &= a_7 \Bigg(b_1\left(0-\frac{1}{2}\right)^7 + b_2\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)^7 + b_3\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{2}\right)^7 + b_4\left(\frac{3}{6}-\frac{1}{2}\right)^7 \\
&\qquad + b_5\left(\frac{4}{6}-\frac{1}{2}\right)^7 + b_6\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)^7 + b_7\left(1-\frac{1}{2}\right)^7\Bigg) \\
&= a_7 \Bigg(b_1\left(\frac{-1}{2}\right)^7 + b_2\left(\frac{-2}{6}\right)^7 + b_3\left(\frac{-1}{6}\right)^7 + b_4\,(0)^7 \\
&\qquad + b_5\left(\frac{1}{6}\right)^7 + b_6\left(\frac{2}{6}\right)^7 + b_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\Bigg) = 0
\end{aligned}$$

En résumé,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 q(x)\,dx &= a_7 \underbrace{\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^7 dx}_{=0} - \int_0^1 s(x) \\
&= -^7 - \sum_{j=1}^{7} b_j s(c_j) = \underbrace{\sum_{j=1}^{s} b_j a_7 \left(c_j - \frac{1}{2}\right)^7}_{=0} - \sum_{j=1}^{7} b_j s(c_j) = \sum_{j=1}^{s} b_j q(c_j)
\end{aligned}$$

□

an-ncmn.53 Sur la figure 1, nous avons tracé les graphes des fonctions $f_n(x) = (x-0.5)^n$ pour $n = 1, 3, 5, 7$ et 9. On constate que comme n est impair,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \left.\frac{(x-0.5)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = 0$$

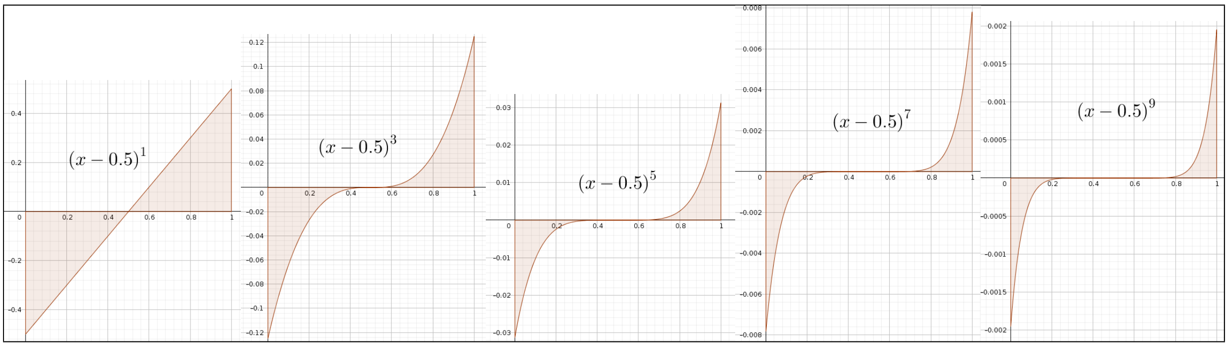


FIGURE 1. Les fonctions: $x-0.5$, $(x-0.5)^3$, $(x-0.5)^5$, $(x-0.5)^7$, $(x-0.5)^9$

4. Formules de quadrature d'ordre maximal an-ncmn.54

an-ncmn.55 Nous allons montrer que l'ordre d'une formule de quadrature à s étages est $\leq 2s$. Nous connaissons déjà une formule de quadrature à 1 étage d'ordre 2, c'est la méthode du point milieu. Nous allons construire:

(1) une formule de quadrature à 2 étages d'ordre 4,
(2) une formule de quadrature à 3 étages d'ordre 6,
(3) une formule de quadrature à 4 étages d'ordre 8.

4.1. Théorème de Jacobi. an-ncmn.56

THÉORÈME 4.1 (Jacobi 1826). an-ncmn.57 *Soit une formule de quadrature à s étages dont les nœuds sont donnés par $c_1, \cdots, c_s$ et la poids par $b_1, \cdots, b_s$. Soit*

$$M(x) = (x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_s)$$

Alors

L'odre de la formule de quadrature est $s+m$ $\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 M(x)q(x)\,dx = 0 \ \forall \text{ polynôme } q(x) \text{ de degré } \leq m-1$$

DÉMONSTRATION. an-ncmn.58 $\Leftarrow$: Comme la formule a s étages, nous savons qu'elle d'ordre $\geq s$. Soit $u(x)$ un polynôme de degré $\leq s+m-1$ (et $\geq s$). Par la division euclidienne

$$u(x) = M(x)q(x) + r(x)$$

où $r(x)$ est de degré $< s$ et $q(x)$ est de degré $\leq m-1$. Ainsi,

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 M(x)q(x)\,dx}_{=0} + \int_0^1 r(x)\,dx$$

Par ailleurs,

$$\sum_{j+1}^{s} b_j u(c_j) = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{M(c_j)}_{=0} q(c_j) + \sum_{j=1}^{s} b_j r(c_j)$$

Finalement, comme $r(x)$ est de degré $< s$ et que la formule est d'ordre $\geq s$, il suit que

$$\int_0^1 r(x)\,dx = \sum_{j=1}^{s} b_j r(c_j)$$

ce qui montre que

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \sum_{j+1}^{s} b_j u(c_j)$$

c'est-à-dire, que l'ordre de la formule de quadrature est $s+m$.

$\underline{\Rightarrow}$: Soit $q(x)$ un polynôme de degré $\leq m-1$. Alors $M(x)q(x)$ est de degré $\leq s+m-1$. Comme la formule de quadrature est d'ordre $s+m$, il suit que

$$\int_0^1 M(x)q(x)\,dx = \sum_{j=1}^{s} b_j \underbrace{M(c_j)}_{=0} q(c_j) = 0$$

□

Corollaire 4.2. an-ncmn.59 *L'ordre d'une formule de quadrature à s étages est $\leq 2s$*

Démonstration. an-ncmn.60 Le polynôme $M(x)^2$ a s racines et est positif. Il suit

$$\int_0^1 M(x)^2\,dx > 0$$

Comme $M(x)^2$ est de degré $2s$, il suit du théorème de Jacobi que l'ordre de la formule de quadrature est $< s+s+1$, c'est-à-dire $\leq 2s$. □

4.2. Polynômes symétriques et anti-symétriques. an-ncmn.61

an-ncmn.62 Nous dirons qu'un polynôme $q(x)$ est **symétrique** si

$$q(0.5-x) = q(0.5+x)\ \forall\ x$$

en d'autres termes si la fonction $q(0.5+x)$ est paire. De même, nous dirons qu'un polynôme $q(x)$ est **anti-symétrique** si

$$q(0.5-x) = -q(0.5+x)\ \forall\ x$$

en d'autres termes si la fonction $q(0.5+x)$ est impaire.

an-ncmn.63 Remarquons que

$$\int_0^1 q(x)\,dx = 0 \text{ pour tout polynôme anti-symétrique}$$

En effet,

$$\int_{0.5}^1 q(x)\,dx = \int_0^{0.5} q(0.5+y)\,dy = \int_0^{0.5} -q(0.5-y)\,dy = \int_{0.5}^{0} q(x)\,dx = -\int_0^{0.5} q(x)\,dx$$

an-ncmn.64 Remarquons encore que le produit de deux polynômes symétriques est symétrique et que le produit d'un polynôme symétrique et d'un polynôme anti-symétrique est anti-symétrique:

$$a(0.5-x)s(0.5-x) = -a(0.5+x)s(0.5+x)$$

4.3. Construction d'une formule de quadrature à 2 étages d'ordre 4. an-ncmn.65

an-ncmn.66 En vertu du théorème de Jacobi, il suffit de trouver un polynôme $M(x)$ de degré 2 avec deux racines dans l'intervalle $[0;1]$ tel que

$$\int_0^1 M(x)q(x)\,dx = 0$$

pour tout polynôme $q(x)$ de degré ≤ 1.

an-ncmn.67 Sans perte de généralité, nous pouvons écrire le polynôme de degré 1 $q(x)$ somme

$$q(x) = a(x-0.5) + b$$

C'est la somme d'un polynôme anti-symétrique de degré 1: $a(x-0.5)$ et d'un polynôme symétrique de degré 0: b

an-ncmn.68 Nous choisissons pour $M(x)$ un polynôme symétrique de degré 2:

$$M(x) = (x-0.5-\mu)(x-0.5+\mu) = (x-0.5)^2 - \mu^2$$

Comme nous l'avons remarqué, $M(x)(x-0.5)$ est anti-symétrique et donc

$$\int_0^1 M(x)(x-0.5)\,dx = 0$$

Par conséquent, pour que $M(x)$ satisfasse au critère de Jacobi, il suffit que

$$\int_0^1 M(x)\,dx = 0$$

c'est-à-dire

$$0 = \int_0^1 \left((x-0.5)^2 - \mu^2\right)\,dx = \left(\frac{(x-0.5)^3}{3} - \mu^2 x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3\cdot 8} - \mu^2 \;\Rightarrow\; \mu = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Il suit que la méthode à 2 étages dont les nœuds sont données par

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ et } c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

est d'ordre 4. Cette formule de quadrature est due à Gauss. Ses poids sont donnés par (voir exercices)

$$b_1 = \frac{1}{2} \text{ et } b_2 = \frac{1}{2}$$

4.4. Construction d'une formule de quadrature à 3 étages d'ordre 6. an-ncmn.69

an-ncmn.70 Nous choisissons pour $M(x)$ un polynôme anti-symétrique de degré 3:

$$M(x) = (x - 0.5 - \delta)(x - 0.5)(x - 0.5 + \delta) = (x - 0.5)\left((x - 0.5)^2 - \delta^2\right)$$

Nous devons trouver δ tel que

$$\int_0^1 M(x)q(x)\,dx = 0 \text{ pour tout polynôme de degré } \leq 2$$

an-ncmn.71 Sans perte de généralité, nous pouvons écrire $q(x)$ comme:

$$q(x) = a(x - 0.5)^2 + b(x - 0.5) + c$$

Nous savons déjà que

$$\int_0^1 M(x)(x - 0.5)^2\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 M(x)\,dx = 0$$

Par conséquent, pour que le polynôme $M(x)$ satisfasse au critère de Jacobi, il suffit que

$$\int_0^1 M(x)(x - 0.5)\,dx = 0$$

c'est-à-dire que

$$0 = \int_0^1 M(x)(x - 0.5)\,dx = \int_0^1 \left((x - 0.5)^2 - \delta^2\right)(x - 0.5)^2\,dx$$

$$= \left(\frac{(x - 0.5)^5}{5} - \delta^2 \frac{(x - 0.5)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{5 \cdot 32} - \delta^2 \frac{1}{3 \cdot 8}\right)$$

$$\Rightarrow\ \delta = \pm\sqrt{\frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 32}} = \pm\sqrt{\frac{3}{5 \cdot 4}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{10}$$

Nous avons montré que la formule de quadrature dont les nœuds sont donnés par

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10},\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}}$$

est d'ordre 6. Elle est due à Gauss (encore lui !). Ses poids sont donnés par (voir exercices):

$$b_1 = \frac{5}{18},\ b_2 = \frac{8}{18},\ b_3 = \frac{5}{18}$$

4.5. Construction d'une formule de quadrature à 4 étages d'ordre 8. an-ncmn.72

an-ncmn.73 Nous choisissons pour $M(x)$ un polynôme symétrique de degré 4:

$$M(x) = (x - 0.5 - \delta)(x - 0.5 + \delta)(x - 0.5 - \gamma)(x - 0.5 + \gamma) = \left((x - 0.5)^2 - \delta^2\right)\left((x - 0.5)^2 - \gamma^2\right)$$

Nous devons trouver δ et γ tels que

$$\int_0^1 M(x)q(x)\,dx = 0 \text{ pour tout polynôme de degré } \leq 3$$

an-ncmn.74 Sans perte de généralité, nous pouvons écrire $q(x)$ comme:

$$q(x) = a(x-0.5)^3 + b(x-0.5)^2 + c(x-0.5) + d$$

Nous savons déjà que

$$\int_0^1 M(x)(x-0.5)\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 M(x)(x-0.5)^3\,dx = 0$$

Par conséquent, pour que le polynôme $M(x)$ satisfasse au critère de Jacobi, il suffit que

$$\int_0^1 M(x)\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 M(x)(x-0.5)^2\,dx = 0$$

c'est-à-dire

$$0 = \int_0^1 \left((x-0.5)^2-\delta^2\right)\left((x-0.5)^2-\gamma^2\right)\,dx = \left[\frac{(x-0.5)^5}{5} - \left(\delta^2+\gamma^2\right)\frac{(x-0.5)^3}{3} + \delta^2\gamma^2 x\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \boxed{\frac{1}{80} - \frac{1}{12}(\delta^2+\gamma^2) + \delta^2\gamma^2 = 0}$$

et

$$0 = \int_0^1 (x-0.5)^2\left((x-0.5)^2-\delta^2\right)\left((x-0.5)^2-\gamma^2\right)\,dx$$

$$= \left[\frac{(x-0.5)^7}{7} - \left(\delta^2+\gamma^2\right)\frac{(x-0.5)^5}{5} + \delta^2\gamma^2\frac{(x-0.5)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \boxed{\frac{1}{448} - \frac{1}{80}(\delta^2+\gamma^2) + \frac{1}{12}\delta^2\gamma^2 = 0}$$

an-ncmn.75 Pour résoudre ce système, nous pouvons, par exemple, isoler γ^2 dans la première équation:

$$\gamma^2\left(\delta^2 - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80} \;\Rightarrow\; \gamma^2 = \frac{\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}}{\delta^2 - \frac{1}{12}}$$

et substituer dans la seconde équation:

$$\frac{1}{448} - \frac{1}{80}\left(\delta^2 + \frac{\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}}{\delta^2 - \frac{1}{12}}\right) + \frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}}{\delta^2 - \frac{1}{12}}\right) = 0$$

En multipliant cette équation par $\delta^2 - \frac{1}{12}$ il vient

$$\frac{\delta^2 - \frac{1}{12}}{448} - \frac{1}{80}\left(\delta^4 - \frac{1}{12}\delta^2 + \frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}\right) + \frac{1}{144}\delta^4 - \frac{1}{960}\delta^2 = 0$$

c'est-à-dire

$$\delta^4\left(\frac{1}{144} - \frac{1}{80}\right) + \delta^2\left(\frac{1}{448} - \frac{1}{960}\right) + \frac{1}{6400} - \frac{1}{5376}$$

ou encore

$$-\frac{1}{180}\delta^4 + \frac{1}{840}\delta^2 - \frac{1024}{34406400} = 0$$

Or, $34406400 = 560 \cdot 1024 \cdot 60$ et donc, l'équation à résoudre devient

$$\frac{1}{3}\delta^4 - \frac{1}{14}\delta^2 + \frac{1}{560} = 0$$

Le discriminent vaut

$$\Delta = \frac{2}{735} \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{2}{15}}$$

et

$$\delta = \sqrt{\frac{\frac{1}{14} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{2}{15}}}{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{14} + \frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{30}}{15}}{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{\frac{2}{3}\cdot 14 \cdot 15}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}$$

an-ncmn.76 Nous avons montré que la formule de quadrature à 4 étages dont les nœuds sont donnés par

$$\boxed{\begin{array}{ll} c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}}, & c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}, \\ c_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}, & c_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}} \end{array}}$$

est d'ordre 8. Elle est due à Gauss (encore lui !!). Ses poids sont donnés par

$$b_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{30}}{72}, \; b_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{30}}{72}, \; b_3 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{30}}{72}, \; b_4 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{30}}{72}$$

4.6. Construction d'une formule de quadrature à 5 étages d'ordre 10. an-ncmn.77

an-ncmn.78 Nous choisissons pour $M(x)$ un polynôme anti-symétrique de degré 5:

$$\begin{aligned} M(x) &= (x-0.5)(x-0.5-\delta)(x-0.5+\delta)(x-0.5-\gamma)(x-0.5+\gamma) \\ &= (x-0.5)\left((x-0.5)^2-\delta^2\right)\left((x-0.5)^2-\gamma^2\right) \end{aligned}$$

Nous devons trouver δ et γ tels que

$$\int_0^1 M(x)q(x)\,dx = 0 \text{ pour tout polynôme de degré } \leq 4$$

an-ncmn.79 Sans perte de généralité, nous pouvons écrire $q(x)$ comme:

$$q(x) = a(x-0.5)^4 + b(x-0.5)^3 + c(x-0.5)^2 + d(x-0.5) + e$$

Nous savons déjà que

$$\int_0^1 M(x)\,dx = 0,\ \int_0^1 M(x)(x-0.5)^2\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 M(x)(x-0.5)^4\,dx = 0$$

Par conséquent, pour que le polynôme $M(x)$ satisfasse au critère de Jacobi, il suffit que

$$\int_0^1 M(x)(x-0.5)\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 M(x)(x-0.5)^3\,dx = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (x-0.5)^2\left((x-0.5)^2-\delta^2\right)\left((x-0.5)^2-\gamma^2\right)\,dx \\ &= \left[\frac{(x-0.5)^7}{7} - \left(\delta^2+\gamma^2\right)\frac{(x-0.5)^5}{5} + \delta^2\gamma^2\frac{(x-0.5)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 \\ &= \boxed{\frac{1}{448} - \frac{1}{80}(\delta^2+\gamma^2) + \frac{1}{12}\delta^2\gamma^2 = 0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (x-0.5)^4\left((x-0.5)^2-\delta^2\right)\left((x-0.5)^2-\gamma^2\right)\,dx \\ &= \left[\frac{(x-0.5)^9}{9} - \left(\delta^2+\gamma^2\right)\frac{(x-0.5)^7}{7} + \delta^2\gamma^2\frac{(x-0.5)^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 \\ &= \boxed{\frac{1}{2304} - \frac{1}{448}(\delta^2+\gamma^2) + \frac{1}{80}\delta^2\gamma^2 = 0} \end{aligned}$$

an-ncmn.80 Pour résoudre ce système, nous pouvons, par exemple, isoler γ^2 dans la première équation:

$$\gamma^2\left(\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}\right) = \frac{1}{80}\delta^2 - \frac{1}{448} \ \Rightarrow\ \gamma^2 = \frac{\frac{1}{80}\delta^2 - \frac{1}{448}}{\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}}$$

et substituer dans la seconde équation:

$$\frac{1}{2304} - \frac{1}{448}\left(\delta^2 + \frac{\frac{1}{80}\delta^2 - \frac{1}{448}}{\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}}\right) + \frac{\delta^2}{80}\left(\frac{\frac{1}{80}\delta^2 - \frac{1}{448}}{\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}}\right) = 0$$

En multipliant cette équation par $\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}$ il vient

$$\frac{\frac{1}{12}\delta^2 - \frac{1}{80}}{2304} - \frac{1}{448}\left(\frac{1}{12}\delta^4 - \frac{1}{80}\delta^2 + \frac{1}{80}\delta^2 - \frac{1}{448}\right) + \frac{1}{6400}\delta^4 - \frac{1}{35840}\delta^2 = 0$$

c'est-à-dire

$$\delta^4\left(\frac{1}{6400} - \frac{1}{5376}\right) + \delta^2\left(\frac{1}{27648} - \frac{1}{35840}\right) + \frac{1}{200704} - \frac{1}{184320}$$

ou encore

$$-\frac{1}{33600}\delta^4 + \frac{1}{120960}\delta^2 - \frac{1}{2257920} = 0$$

et en multipliant par 6720:

$$\frac{1}{5}\delta^4 - \frac{1}{18}\delta^2 + \frac{1}{336} = 0$$

Le discriminent vaut

$$\Delta = \frac{2}{2835} \;\Rightarrow\; \sqrt{\Delta} = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{35}}$$

et

$$\delta = \sqrt{\frac{\frac{1}{18} + \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{35}}}{\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{18} + \frac{1}{9}\frac{\sqrt{70}}{35}}{\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{35 + 2\sqrt{70}}{\frac{2}{5}\cdot 18\cdot 35}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}}$$

an-ncmn.81 Nous avons montré que la formule de quadrature à 4 étages dont les nœuds sont donnés par

$$\boxed{\begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}},\ c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}},\ c_3 = \frac{1}{2} \\ c_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}},\ c_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}} \end{array}}$$

est d'ordre 8. Elle est due à Gauss (encore lui !!!). Ses poids sont donnés par

$$b_1 = \frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800},\ b_2 = \frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800},\ b_3 = \frac{64}{225},\ b_4 = \frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800},\ b_5 = \frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800}$$