CHAPITRE 1

Algèbre linéaire al-ncli.1 [**1** - B. Ischi 06-07]

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ al-ncli.2

DÉFINITION 1.1. al-ncli.3 Notons $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-tuples $(x_1; \cdots; x_n)$ de nombre réels. Nous notons les n-tuples par $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$, $\cdots$ et nous les appelons des **vecteurs**.

Soient $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit

(1) $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1; \cdots; x_n + y_n)$
(2) $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = (\lambda \cdot x_1; \cdots; \lambda \cdot x_n)$

EXEMPLE 1.2. al-ncli.4 $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble des couples de nombres réels $(x_1; x_2)$ et $\mathbb{R}^3$ désigne l'ensemble des triplets de nombres réels $(x_1; x_2; x_3)$. Par exemple

(1) $(1; -2; 3.75) + (7.5; 1; -2) = (1 + 7.5; -2 + 1; 3.75 - 2) = (8.5; -1; 1.75)$
(2) $-3 \cdot (2; 3.5; -5) = (-3 \cdot 2; -3 \cdot 3.5; -3 \cdot (-5))$

REMARQUE 1.3. al-ncli.5 A chaque $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$ on peut associer un point du plan en procédant de la façon suivante: on place deux axes perpendiculaires gradués et orientés et on associe à $\overrightarrow{x} = (x_1; x_2)$ le point d'abscisse x_1 et d'ordonnée x_2 (voir figure 1).

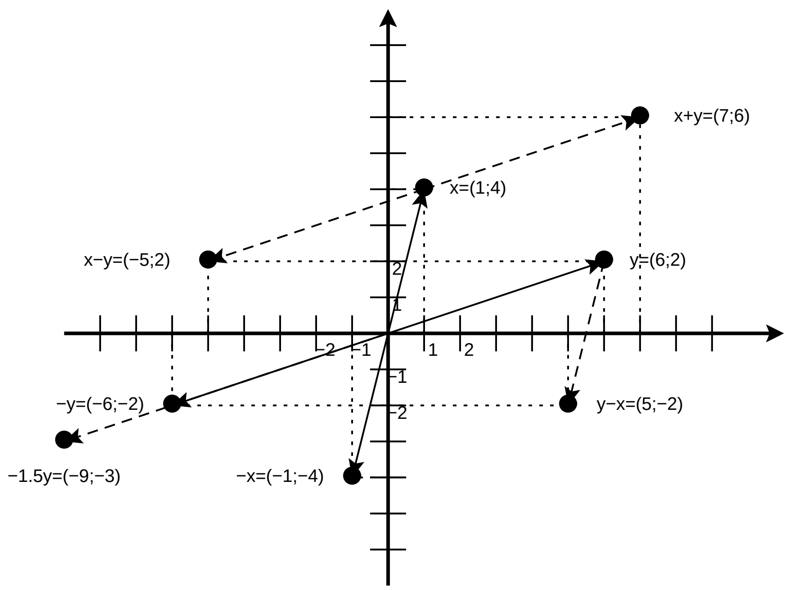

FIGURE 1.

Remarquons que $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ s'obtient en mettant bout à bout les "flèches" reliant $(0; 0)$ à $\overrightarrow{x}$ et $(0; 0)$ à $\overrightarrow{y}$. Par ailleurs, -$\overrightarrow{x}$ s'obtient en "renversant" la flèche de $\overrightarrow{x}$. Finalement, $1.5 \cdot (-\overrightarrow{y})$ s'obtient en dilatant la flèche de $-\overrightarrow{y}$ d'un facteur 1.5.

Remarque 1.4. al-ncli.6 [1 - B. Ischi 22-23] Soient A, B, C, $D \in \mathbb{R}^2$. On définit, par exemple,

$$\overrightarrow{AB} := B - A$$

Quand on représente les points sur un graphique (voir par exemple la figure 2), la flèche reliant l'origine au point A est notée $\overrightarrow{0A}$ et la flèche reliant A à B est notée $\overrightarrow{AB}$. Remarquons que:

(1) la flèche reliant l'origine au point dont les coordonnées sont données par les composantes de $\overrightarrow{AB}$ est parallèle, de même longueur et de même sens que la flèche reliant A à B. Par exemple, sur la figure 2, on a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Par exemple, sur la figure 2, on a:

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\overrightarrow{DC} = C - D = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

(3) que, par exemple,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette égalité est appelée la relation de Chasles. En effet,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}$$

Toutes ces considérations restent vraies dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque 1.5. al-ncli.7 [1 - B. Ischi 23-24] On peut interpréter les vecteurs soit comme des points (dans ce cas on les note A, B, C, $\cdots$) soit comme des flèches (dans ce cas on les note $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\cdots$).

Remarque 1.6. al-ncli.8 [1 - B. Ischi 06-07] Dorénavant, nous noterons $\overrightarrow{0}$ au lieu de $(0;0)$ ou $(0;\cdots;0)$.

Proposition 1.7. al-ncli.9 *Soient $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Alors, (la démonstration est à faire en exercice)*

(1) $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$ *(l'addition dans $\mathbb{R}^n$ est associative)*
(2) $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0}$ *($\overrightarrow{0}$ est l'élément neutre)*
(3) $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x} = 0$
(4) $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$ *(l'addition dans $\mathbb{R}^n$ est commutative)*
(5) $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{x}$

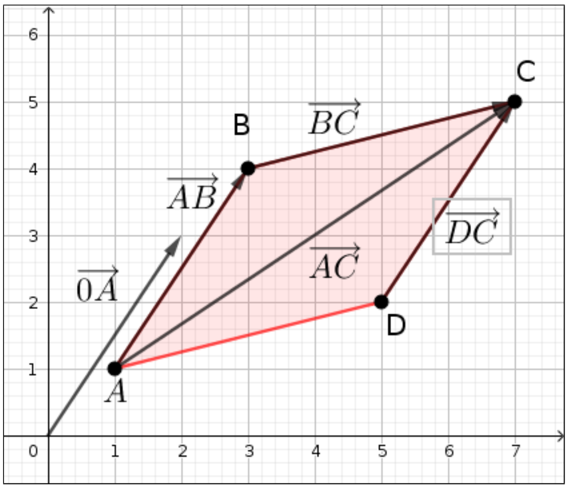

FIGURE 2. Relations de Chasles

(6) $(\lambda\,\mu)\cdot\overrightarrow{x} = \lambda\cdot(\mu\cdot\overrightarrow{x})$
(7) $\lambda\cdot(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = \lambda\cdot\overrightarrow{x}+\lambda\cdot\overrightarrow{y}$
(8) $1\cdot\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

REMARQUE 1.8. al-ncli.10 Les propriétés 1 à 4 se résument en disant que $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition des vecteurs est un **groupe abélien**. De même, les propriétés 1 à 8 se résument en disant que $\mathbb{R}^n$ muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication par un nombre est un **espace vectoriel**.

DÉFINITION 1.9. al-ncli.11 [1 - B. Ischi 07-08] Des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k} \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1\cdot\overrightarrow{v_1}+\cdots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{v_k}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \lambda_i=0\ \forall\,1\le i\le k$$

DÉFINITION 1.10. al-ncli.12 Un sous-ensemble non vide $V\subseteq\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si

(1) $\vec{x}+\vec{y}\in V,\ \forall\,\vec{x},\vec{y}\in V$
(2) $\lambda\cdot\vec{x}\in V,\ \forall\,\vec{x}\in V,\ \lambda\in\mathbb{R}$

REMARQUE 1.11. al-ncli.13 [1 - B. Ischi 13-14] Si $V\subseteq\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors V est un espace vectoriel. De plus, on a toujours $\vec{0}\in V$.

DÉFINITION 1.12. al-ncli.14 [1 - B. Ischi 07-08] Soit $V\subseteq\mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Un ensemble $B=\{\overrightarrow{v_1},\cdots,\overrightarrow{v_k}\}$ de k vecteurs de V (*i.e.* $\overrightarrow{v_i}\in V,\ \forall\,1\le i\le k$) est une base de V si les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}$ sont linéairement indépendants et s'ils engendrent V, c'est-à-dire, si tout vecteur $\overrightarrow{y}\in V$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_i}$ (*i.e.* $\overrightarrow{y} = \lambda_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\lambda_k\overrightarrow{v_k}$).

REMARQUE 1.13. al-ncli.15 [1 - B. Ischi 13-14] Les vecteurs

$$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \vec{e_n}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la **base canonique**

THÉORÈME 1.14. al-ncli.16 [1 - B. Ischi 07-08] *Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admet une base.*

THÉORÈME 1.15. al-ncli.17 *Soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. Si $B = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}\}$ et $B' = \{\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_l}\}$ sont des bases de V, alors $k = l$. En d'autres termes, deux bases quelconques de V ont le même nombre d'éléments.*

DÉFINITION 1.16. al-ncli.18 Soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Le nombre de vecteurs d'une base de V est appelé la dimension de V et se note $\dim(V)$.

2. Produit scalaire al-ncli.19 [1 - B. Ischi 06-07]

DÉFINITION 2.17. al-ncli.20 Soient $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. On définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ par

$$\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y} = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n$$

DÉFINITION 2.18. al-ncli.21 Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. On définit la **norme** de $\overrightarrow{x}$ par

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{x}}$$

REMARQUE 2.19. al-ncli.22 Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Remarquons que

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Donc, par le théorème de Pythagore, la norme de $\overrightarrow{x}$ est la longueur de la "flèche" reliant $\overrightarrow{0}$ à $\overrightarrow{x}$.

PROPOSITION 2.20. al-ncli.23 [1 - B. Ischi 22-23] *Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$$

DÉMONSTRATION. al-ncli.24 Rappelons que, par définition,

$$\lambda\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |\lambda|\|\vec{x}\|$$

□

PROPOSITION 2.21. al-ncli.25 [1 - B. Ischi 06-07] *Soient $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, (la démonstration est à faire en exercice)*

(B1) $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{z}$
(B2) $(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) \bullet \overrightarrow{y} = \lambda(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y})$
(S) $\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{x}$ *(le produit scalaire est symétrique)*
(DP) $\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{x} > 0\ \forall\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ *(le produit scalaire est défini positif)*

REMARQUE 2.22. al-ncli.26 Les propriétés du produit scalaire énoncées ci-dessus se résument en disant que le produit scalaire est une **forme bilinéaire** (propriétés **B1** et **B2** à gauche et à droite), **symétrique** (propriété **S**), **définie positive** (propriété **DP**). L'espace $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert (on dit aussi espace euclidien).

EXEMPLE 2.23. al-ncli.27 [1 - B. Ischi 13-14] Soit V l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire sur V.

3. Inégalité de Cauchy-Schwarz al-ncli.28 [1 - B. Ischi 06-07]

THÉORÈME 3.24 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). al-ncli.29 *Soient $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Alors, on a l'inégalité*

$$|\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\|\,\|\overrightarrow{y}\|$$

DÉMONSTRATION. al-ncli.30 Posons

$$f(\mathbf{t}) = \|\overrightarrow{x} - \mathbf{t}\cdot\overrightarrow{y}\|^2$$

Par définition, $f(\mathbf{t}) \geq 0$ pour tout $\mathbf{t}$. Remarquons que si $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ l'inégalité est vraie. Par conséquent, nous pouvons supposer pour la suite que $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$.

Par ailleurs, par les propriétés **B1**, **B2** et **S** du produit scalaire, nous trouvons que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= \|\overrightarrow{x} - \mathbf{t}\cdot\overrightarrow{y}\|^2 \\ &= (\overrightarrow{x} - \mathbf{t}\cdot\overrightarrow{y}) \bullet (\overrightarrow{x} - \mathbf{t}\cdot\overrightarrow{y}) \\ &= \overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{x} - 2(\mathbf{t}\cdot\overrightarrow{y}) \bullet \overrightarrow{x} + \mathbf{t}^2(\overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{y}) \\ &= \|\overrightarrow{y}\|^2\mathbf{t}^2 - 2(\overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{x})\mathbf{t} + \|\overrightarrow{x}\|^2 \\ &= a\mathbf{t^2} + b\mathbf{t} + c \end{aligned}$$

où $a = \|\overrightarrow{y}\|^2$, $b = -2(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y})$ et $c = \|\overrightarrow{x}\|^2$.

Donc le graphe de f est une parabole convexe (car par les axiomes **D** et **P**, $a > 0$) qui coupe l'axe horizontal au plus en un seul point. Par conséquent, nous savons que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$. Or

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac \leq 0 &\Rightarrow (-2(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y}))^2 - 4\|\overrightarrow{y}\|^2\|\overrightarrow{x}\|^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow 4(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y})^2 \leq 4\|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 \\ &\Rightarrow |\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y}|^2 \leq \|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 \\ &\Rightarrow |\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| \end{aligned}$$

$\square$

THÉORÈME 3.25 (Inégalité du triangle). al-ncli.31 [1 - B. Ischi 22-23] *Soient $\vec{x}$ et $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Alors, on a*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Démonstration. al-ncli.32 Par définition et en vertu des propriétés du produit scalaire énoncées plus haut, on a

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}) \bullet (\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\bullet\vec{x} + \vec{x}\bullet\vec{y} + \vec{y}\bullet\vec{x} + \vec{y}\bullet\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\bullet\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$$

et en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\bullet\vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2|\vec{x}\bullet\vec{y}| + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

Par conséquent, nous avons montré que

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

c'est-à-dire

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

□

4. Applications linéaires al-ncli.33 [1 - B. Ischi 07-08]

Définition 4.26. al-ncli.34 Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire si

(1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$, $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

(2) $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$, $\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Définition 4.27. al-ncli.35 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application. On définit

(1) $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$ ($\mathrm{Ker}(f)$ est appelé le noyau de f)

(2) $\mathrm{Im}(f) = \left\{f(\vec{x}) \;\middle|\; \vec{x} \in \mathbb{R}^n\right\}$ ($\mathrm{Im}(f)$ est appelé l'image de f)

Remarque 4.28. al-ncli.36 Par définition, f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$. Par ailleurs, si f n'est pas injective, alors il existe deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tels que $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$. Par conséquent, $f(\vec{x}-\vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}$, ce qui montre que $\vec{x}-\vec{y} \in \mathrm{Ker}(f)$, donc que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$. Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$, alors il existe $\vec{y} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{y}) = \vec{0}$. Par conséquent, pour tout vecteur $\vec{x}$, $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x})$, ce qui montre que f n'est pas injective. En résumé

$$\begin{aligned} f \text{ n'est pas injective} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, \vec{x} \neq \vec{y} \;\Big|\; f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \vec{x} \neq \vec{y} \;\Big|\; f(\vec{x}-\vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\} \end{aligned}$$

Théorème 4.29. al-ncli.37 [1 - B. Ischi 25-26] *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors*

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace-vectoriel de* $\mathbb{R}^n$

(2) $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace-vectoriel de* $\mathbb{R}^m$

(3) f *est injective* $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$

Démonstration. al-ncli.38

(1) Soient $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme f est linéaire, $f(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} \in \mathrm{Ker}(f)$. Par ailleurs, $f(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = \lambda f(\overrightarrow{x}) = \lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que $\lambda \cdot \overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f)$.

(2) Soient $\overrightarrow{a} = f(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{y}) \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme f est linéaire, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})$, ce qui montre que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in \mathrm{Im}(f)$. Par ailleurs, $\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}) = f(\lambda \cdot \overrightarrow{x})$, ce qui montre que $\lambda \cdot \overrightarrow{a} \in \mathrm{Im}(f)$.

(3) Si f n'est pas injective, alors il existe deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tels que $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$. Par conséquent, $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}$, ce qui montre que $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}(f)$, donc que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$. Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$, alors il existe $\vec{y} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{y}) = \vec{0}$. Par conséquent, pour tout vecteur $\vec{x}$, $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x})$, ce qui montre que f n'est pas injective. En résumé

$$\begin{aligned} f \text{ n'est pas injective} &\Leftrightarrow \exists\, \vec{x} \neq \vec{y} \;\Big|\; f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \\ &\Leftrightarrow \exists\, \vec{x} \neq \vec{y} \;\Big|\; f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\} \end{aligned}$$

□

Théorème 4.30 (Théorème des dimensions). al-ncli.39 [1 - B. Ischi 07-08] *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application linéaire. Alors*

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace-vectoriel de* $\mathbb{R}^n$
(2) $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace-vectoriel de* $\mathbb{R}^m$
(3) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$.

Démonstration. al-ncli.40

(1) Soient $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme f est linéaire, $f(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x})+f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in \mathrm{Ker}(f)$. Par ailleurs, $f(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = \lambda f(\overrightarrow{x}) = \lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que $\lambda \cdot \overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f)$.

(2) Soient $\overrightarrow{a} = f(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{y}) \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme f est linéaire, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})$, ce qui montre que $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in \mathrm{Im}(f)$. Par ailleurs, $\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}) = f(\lambda \cdot \overrightarrow{x})$, ce qui montre que $\lambda \cdot \overrightarrow{a} \in \mathrm{Im}(f)$.

(3) Notons $k = \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}\}$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ (*i.e.* $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}$ engendrent $\mathrm{Ker}(f)$ et $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}$ sont linéairement indépendants). Si $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{Im}(f) = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n + 0 = n$. Nous pouvons donc supposer que $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathbb{R}^n$.

Soit $\overrightarrow{w_{k+1}} \in \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{Ker}(f)$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}, \overrightarrow{w_{k+1}}$ sont linéairement indépendants. En effet, si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{v_i} + \mu \cdot \overrightarrow{w_{k+1}} = \overrightarrow{0}$, alors $-\mu \cdot \overrightarrow{w_{k+1}} \in \mathrm{Ker}(f)$, par conséquent, $\mu = 0$, d'où il suit que $\lambda_i = 0$, $\forall 1 \leq i \leq k$. Notons V_{k+1} le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}, \overrightarrow{w_{k+1}}$. Si $V_{k+1} \neq \mathbb{R}^n$, alors il existe un vecteur $\overrightarrow{w_{k+2}} \in \mathbb{R}^n \backslash V_{k+1}$.

En itérant ce raisonnement, on montre qu'il existe $n - k$ vecteurs $\overrightarrow{w_{k+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}, \overrightarrow{w_{k+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Nous terminons la démonstration en montrant que les vecteurs $f(\overrightarrow{w_{k+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{w_n})$ forment une base de $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - k = n - \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Comme f est linéaire, si $\lambda_{k+1} f(\overrightarrow{w_{k+1}}) + \cdots + \lambda_n f(\overrightarrow{w_n}) = \overrightarrow{0}$, alors $f(\lambda_{k+1}\overrightarrow{w_{k+1}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{w_n}) = \overrightarrow{0}$, d'où il suit que $\lambda_{k+1}\overrightarrow{w_{k+1}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{w_n} \in \mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire $\lambda_{k+1}\overrightarrow{w_{k+1}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{w_n} = \mu_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{v_k}$. Par conséquent, comme les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}, \overrightarrow{w_{k+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}$

sont linéairement indépendants, nous trouvons que $\mu_1 = \cdots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qui montre que les vecteurs $f(\overrightarrow{w_{k+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{w_n})$ sont linéairement indépendants.

Finalement, soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors, $\overrightarrow{x} = \mu_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \mu_k\overrightarrow{v_k} + \lambda_{k+1}\overrightarrow{w_{k+1}} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{w_n}$, ainsi,

$$f(\overrightarrow{x}) = \lambda_1 f(\vec{v_1}) + \cdots + \lambda_k f(\vec{v_k}) + \lambda_{k+1} f(\overrightarrow{w_{k+1}}) + \cdots + \lambda_n f(\overrightarrow{w_n})$$

ce qui montre que les vecteurs $f(\overrightarrow{w_{k+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{w_n})$ engendrent $\mathrm{Im}(f)$.

□

5. Matrices al-ncli.41

Définition 5.31. al-ncli.42 On note

$$\vec{e_1} = (1, 0, \cdots, 0), \quad \vec{e_2} = (0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots, \vec{e_n} = (0, \cdots, 0, 1)$$

Remarque 5.32. al-ncli.43 Pour tout n, les vecteurs $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ sont linéairement indépendants et engendrent $\mathbb{R}^n$. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.33. al-ncli.44 La base $B = \{\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelée la base canonique.

Définition 5.34. al-ncli.45 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. La matrice associée à f, notée A_f, est un tableau de nombres avec m lignes et n colonnes. Le nombre à la ligne i et la colonne j est défini par

$$[A_f]_{ij} = \vec{e_i} \bullet f(\vec{e_j})$$

Remarque 5.35. al-ncli.46 La colonne j de A_f contient les composantes du vecteur $f(\vec{e_j})$ écrit dans la base canonique.

Définition 5.36. al-ncli.47 Soit A une matrice $n \times m$ (*i.e.* avec n lignes et m colonnes) et B une matrice $m \times l$. Alors, on définit le produit de A et B par

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq l$$

Ce produit est appelé le produit ligne-colonne.

Remarque 5.37. al-ncli.48 La matrice $A \cdot B$ est une matrice $n \times l$.

Remarque 5.38. al-ncli.49 [1 - B. Ischi 09-10] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A_f sa matrice relativement à la base canonique. Alors,

$$f(\vec{x}) = A_f \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Définition 5.39. al-ncli.50 [1 - B. Ischi 07-08] Soient A et B des matrices $n \times m$ (*i.e.* avec n lignes et m colonnes). Alors, on définit la somme de A et B par

$$[A + B]_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

DÉFINITION 5.40. al-ncli.51 Soit A une matrice $n \times m$ (*i.e.* avec n lignes et m colonnes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on définit la produit de λ et A par

$$[\lambda \cdot A]_{ij} = \lambda \cdot A_{ij}$$

DÉFINITION 5.41. al-ncli.52 Soit A une matrice $n \times m$. On définit la matrice transposée de A, notée $A^\top$, par

$$\left[A^\top\right]_{ij} = A_{ji}$$

PROPOSITION 5.42. al-ncli.53 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ des applications linéaires. Notons A_f et A_g les matrices, relativement à la base canonique, respectivement de f et g. De plus, notons $A_{g \circ f}$ la matrice de $g \circ f$ relativement à la base canonique. Alors*

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f$$

DÉMONSTRATION. al-ncli.54 Par définition,

$$[A_{g \circ f}]_{ij} = \overrightarrow{e_i} \bullet g(f(\overrightarrow{e_j})) = \overrightarrow{e_i} \bullet \left(\sum_{k=1}^{m} g\left([A_f]_{kj} \overrightarrow{e_k} \right) \right) = \sum_{k=1}^{m} [A_f]_{kj} \overrightarrow{e_i} \bullet g\left(\overrightarrow{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{m} [A_f]_{kj} [A_g]_{ik}$$

□

6. Déterminant pour les matrices 2×2 et 3×3 al-ncli.55 [1 - B. Ischi 10-11]

DÉFINITION 6.43. al-ncli.56 Soit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

une matrice 2×2. On définit le **déterminant** de A (que l'on note $|A|$) par

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

DÉFINITION 6.44. al-ncli.57 Soit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

une matrice 3×3. On définit le **déterminant** de A (que l'on note $|A|$) par

$$|A| = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31}$$

7. Déterminants al-ncli.58 [1 - B. Ischi 07-08]

THÉORÈME 7.45. al-ncli.59 *Soit σ une permutation (i.e. une bijection) de l'ensemble à n éléments $\{1, \cdots, n\}$. Alors, σ se décompose en un produit de transpositions (i.e. de permutations de 2 éléments). Ce produit n'est pas unique, mais le nombre de transpositions nécessaires pour représenter σ est soit toujours pair, soit toujours impair.*

Définition 7.46. al-ncli.60 On définit la signature d'une permutation σ, notée $\operatorname{sgn}(\sigma)$, par 1 si le nombre de transpositions nécessaires pour représenter σ est pair et -1 si ce nombre est impair. La permutation σ est dite paire si $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$ et impaire si $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Remarque 7.47. al-ncli.61 Pour calculer la signature d'une permutation, on peut la représenter comme sur la figure 3. On relie les points de manière à ce que des croisements de traits ne se superposent pas. Pour cet exemple, $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$ et $\sigma(3) = 1$. Il y a trois croisements. La signature vaut $(-1)^3 = -1$.

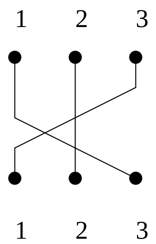

Figure 3. Signature d'une permutation

Définition 7.48. al-ncli.62 Soit A une matrice $n \times n$. On définit le déterminant de A, noté $|A|$, par

$$|A| = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

où P_n désigne l'ensemble des permutations (*i.e.* des bijections) de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ le signature de la permutation.

Exemple 7.49. al-ncli.63 Soit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

une matrice 2×2. Il existe deux permutations de l'ensemble $\{1, 2\}$:

$$\sigma_1 \ \{1, 2\} \to \{1, 2\} \qquad \sigma_2 \ \{1, 2\} \to \{2, 1\}$$

La première est paire et la seconde impaire. Ainsi,

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Exemple 7.50. al-ncli.64 Soit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

une matrice 3×3. Il existe $3! = 6$ permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$:

$$\sigma_1 \ \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \qquad \sigma_2 \ \{1,2,3\} \to \{2,3,1\} \qquad \sigma_3 \ \{1,2,3\} \to \{3,1,2\}$$

$$\sigma_4 \ \{1,2,3\} \to \{2,1,3\} \qquad \sigma_5 \ \{1,2,3\} \to \{1,3,2\} \qquad \sigma_6 \ \{1,2,3\} \to \{3,2,1\}$$

Les trois premières sont dites cycliques. Elles sont paires. Les trois dernières sont impaires. Ainsi,
$$|A| = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31}$$

Cette formule est appelée la règle de Sarrus.

DÉFINITION 7.51. al-ncli.65 Soit A une matrice 3×3. On note D_{ij} le déterminant de la matrice 2×2 que l'on obtient en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

PROPOSITION 7.52. al-ncli.66 *Soit A une matrice 3×3. Alors pour toute ligne i et toute colonne j, on a*
$$|A| = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{i+k} A_{ik} \cdot D_{ik} \qquad \textit{et} \qquad |A| = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{j+k} A_{kj} \cdot D_{kj}$$

8. Matrice inverse al-ncli.67

THÉORÈME 8.53. al-ncli.68 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Alors f est bijective si et seulement si $|A_f| \neq 0$.*

DÉFINITION 8.54. al-ncli.69 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire bijective. On note A_f^{-1} la matrice, relativement à la base canonique, de la réciproque de f. La matrice A_f^{-1} est appelée la matrice inverse de A_f.

THÉORÈME 8.55. al-ncli.70 *Soit A une matrice 2×2. Alors*
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 8.56. al-ncli.71 *Soit A une matrice 3×3. Alors*
$$\left[A^{-1}\right]_{ij} = \frac{1}{|A|} (-1)^{i+j} \, d_{ij}$$

où d_{ij} désigne le déterminant de la matrice 2×2 que l'on obtient en supprimant dans $A^\top$ la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne

9. Valeurs et vecteurs propres al-ncli.72

DÉFINITION 9.57. al-ncli.73 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Un nombre λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul $\vec{v} \neq \vec{0}$ tel que
$$f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$$

On dit que $\vec{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

REMARQUE 9.58. al-ncli.74 Si $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$, alors, $f(\mu \cdot \vec{v}) = \mu \cdot f(\vec{v}) = \mu \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$. Par conséquent, si $\vec{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors pour tout nombre $\mu \neq 0$, $\mu \cdot \vec{v}$ est aussi un vecteur propre associé à λ.

THÉORÈME 9.59. al-ncli.75 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Un nombre λ est une valeur propre de f si et seulement si*
$$\det(A_f - \lambda \cdot 1) = 0$$

où 1 désigne la matrice identité (i.e. $1_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $1_{ii} = 1$).

Démonstration. al-ncli.76 Si λ est une valeur propre, alors il existe un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ tel que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, donc $(A - \lambda \cdot 1)\vec{v} = \vec{0}$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot 1) \neq \{\vec{0}\}$, donc $A - \lambda \cdot 1$ n'est pas injective et son déterminant est nul.

Réciproquement, si $\det(A - \lambda \cdot 1) = 0$, alors $A - \lambda \cdot 1$ n'est pas bijective, donc par le théorème des dimensions, $\mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot 1) \neq \{\vec{0}\}$. Par conséquent, il existe un vecteur non nul $\vec{v} \neq \vec{0}$ tel que $(A - \lambda \cdot 1)\vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. □

Définition 9.60. al-ncli.77 Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est diagonalisable s'il existe une base $B = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, c'est-à-dire telle que

$$f(\overrightarrow{v_i}) = \lambda_i \cdot \overrightarrow{v_i} \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

Proposition 9.61. al-ncli.78 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire diagonalisable et A_f sa matrice relativement à la base canonique. Notons B la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les composantes du vecteur propre $\overrightarrow{v_j}$ de f associé à la valeur propre λ_j (i.e. $B_{ij} = [\overrightarrow{v_j}]_i$ et $\overrightarrow{v_j} = \sum_{k=i}^{3} [\overrightarrow{v_j}]_i\, \overrightarrow{e_i}$). Alors,*

$$B^{-1} A_f\, B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Démonstration. al-ncli.79 Notons $\overrightarrow{b_j}$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. Alors, $A_f\,\overrightarrow{b_j} = \lambda_j \overrightarrow{b_j}$, et

$$A_f\, B = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \lambda_2 B_{12} & \lambda_3 B_{13} \\ \lambda_1 B_{21} & \lambda_2 B_{22} & \lambda_3 B_{23} \\ \lambda_1 B_{31} & \lambda_2 B_{32} & \lambda_3 B_{33} \end{pmatrix}$$

Par définition, $B^{-1}\overrightarrow{b_j} = \overrightarrow{e_j}$. Par conséquent, $B^{-1} A_f\,\overrightarrow{b_j} = \lambda_j B^{-1}\overrightarrow{b_j} = \lambda_j \overrightarrow{e_j}$. □